Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Estudia las características necesarias para dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{1+e^{-x}}$

Solución:

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

– Sea la función $f(x)=sen\left(1-x^2\right)$. Comprueba que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ tienen la misma recta tangente en el punto $x=1$.

– Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-x\right)^{1/x^2}$

Solución:

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\dfrac{sen|x|}{x-1}$. Decide si la función alcanza el valor 2 en algún punto del intervalo $[0,4]$. En caso afirmativo encuentra ese punto con un error inferior a 10^{-2}.

Solución:

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Aplica el teorema del valor medio de Lagrange a la función $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ en el intervalo $[0,3]$, determinando el valor o valores garantizados por el teorema.

Solución:

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln^2(x+1)}{x}$, estudia la continuidad y las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

$$f(x)=\frac{\ln^2(x+1)}{x} \quad \Rightarrow \quad Dom\ f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

La función $y=\ln^2(x+1)$ es continua en todo su dominio, por tanto $f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=0$, veamos de qué tipo.

$$f(0)\ no\ existe. \qquad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)}{x}=\begin{pmatrix} indeterminación\ \dfrac{0}{0} \\ aplicamos\ L'Hôpital \end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=0$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=0$

Estudiemos sus asíntotas:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\ln^2(x+1)}{x}\to\frac{+\infty}{-1}\to -\infty \quad \Rightarrow \quad x=-1\ es\ una\ asíntota\ vertical.$$

En $x=0$ no hay asíntota, la discontinuidad es evitable.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2(x+1)}{x}=\begin{pmatrix} indeterminación\ \dfrac{\infty}{\infty} \\ aplicamos\ L'Hôpital \end{pmatrix}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=\begin{pmatrix} indeterminación\ \dfrac{\infty}{\infty} \\ aplicamos\ L'Hôpital \end{pmatrix}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\cdot\dfrac{1}{x+1}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x+1}=0 \quad \Rightarrow \quad y=0\ \ es\ asíntota\ horizontal.$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{e^x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $x=\dfrac{1}{2}$, y la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$ sea paralela a $y=-3x+5$.

Solución:

$$f(x)\ \textit{tiene un mínimo en}\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\textit{La recta tangente a}\ f(x)\ \textit{en}\ x=0\ \textit{es paralela a}\ y=-3x+5\ \ (m=-3)\ \Rightarrow\ f'(0)=-3$$

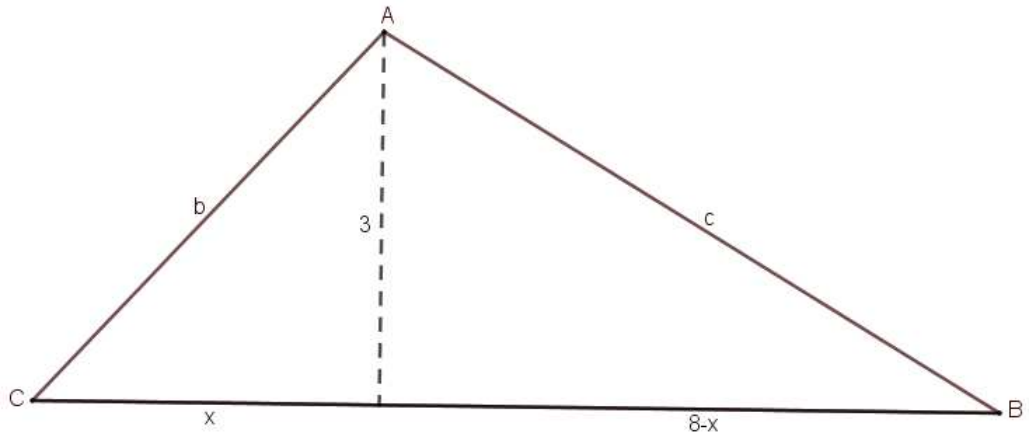
$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{e^x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{(2ax+b)\cdot e^x-(ax^2+bx)\cdot e^x}{e^{2x}}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{-ax^2+(2a-b)x+b}{e^x}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \dfrac{-\frac{a}{4}+\frac{2a-b}{2}+b}{\sqrt{e}}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{-a+4a-2b+4b}{4}=0\ \Rightarrow\ 3a+2b=0 \\ \\ f'(0)=-3\ \Rightarrow\ \dfrac{b}{1}=-3\ \Rightarrow\ b=-3 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

De un triángulo conocemos el lado $a=8cm$ y la altura correspondiente a ese lado $h=3cm$. Calcula el valor de los otros dos lados para que el ángulo $\hat{A}$ sea máximo.

Solución:



$$A=\pi-(B+C)\quad;\quad tang\,B=\frac{3}{8-x}\ \Rightarrow\ B=arctang\left(\frac{3}{8-x}\right)\ ;\quad tang\,C=\frac{3}{x}\ \Rightarrow\ C=arctang\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$A(x)=\pi-\left[arctang\left(\frac{3}{8-x}\right)+arctang\left(\frac{3}{x}\right)\right] \Rightarrow A'(x)=-\left[\frac{\frac{3}{(8-x)^2}}{1+\left(\frac{3}{8-x}\right)^2}+\frac{\frac{-3}{x^2}}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}\right] \Rightarrow A'(x)=-\frac{3}{(8-x)^2+3^2}+\frac{3}{x^2+3^2}$$

$$A'(x)=\frac{3}{x^2+9}-\frac{3}{x^2-16x+73} \quad ; \quad A'(x)=0 \Rightarrow 3\left(x^2-16x+73\right)-3\left(x^2+9\right)=0 \Rightarrow 3(-16x+64)=0 \Rightarrow x=4cm$$

$$A''(x)=\frac{-6x}{\left(x^2+9\right)^2}-\frac{-6x+48}{\left(x^2-16x+73\right)^2} \quad ; \quad A''(4)=\frac{-24}{625}-\frac{24}{625}<0 \Rightarrow \textit{para } x=4, \textit{ el ángulo } A \textit{ es máximo.}$$

Si $x=4cm \Rightarrow b=c=5cm$ *y el triángulo es isósceles.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

– Supongamos que $f(x)$ es una función continua para todo número real x, excepto para $x=2$. Si $g(x)=e^{1/x+1}$, ¿podemos asegurar que la función $(f\circ g)(x)$ es continua en $(0,+\infty)$?

Solución:

$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \Rightarrow$ *para que* $(f\circ g)$ *sea continua en un punto* $x=x_0$, *la función* $g(x)$ *debe ser continua en* $x=x_0$ *y la función* $f(x)$ *debe ser continua en* $x=g(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=e^{1/x+1} \textit{ es continua en } (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty) \\ f(x) \textit{ es continua en } (-\infty,2)\cup(2,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)(x) \textit{ será discontinua en } x=-1 \textit{ y en } x=a \textit{, con } g(a)=2$$

$$g(a)=e^{1/a+1} \; ; \; e^{1/a+1}=2 \Rightarrow \frac{1}{a+1}=\ln 2 \Rightarrow a=\frac{1}{\ln 2}-1>0 \Rightarrow (f\circ g)(x) \textit{ no es continua en } (0,+\infty)$$

– Sea $f(x)=3+x^8\cdot(x-3)^4$. Prueba que $f'(x)$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo $(0,3)$.

Solución:

$f(x)=3+x^8\cdot(x-3)^4$ *es continua y derivable en todo* $\mathbb{R}$ *puesto que es una función polinómica, en particular,* $f(x)$ *es continua en* $[0,3]$, *derivable en* $(0,3)$ *y* $f(0)=f(3)=3 \Rightarrow$ *por el teorema de Rolle,* $\exists c\in(0,3)/\ f'(c)=0 \Rightarrow f'(x)$ *tiene, al menos, una raíz en el intervalo* $(0,3)$.