INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

Entendemos por geometría analítica aquella en la que trabajamos con puntos y vectores expresados en coordenadas y lugares geométricos (conjuntos de puntos que cumplen una determinada condición) expresados mediante sus ecuaciones.

Los vectores serán los elementos del espacio vectorial de los vectores libres del espacio V_3, en el que cada elemento no es un único vector determinado por dos puntos, sino que es una clase de equivalencia, es decir, infinitos vectores equipolentes (misma dirección, mismo sentido, mismo módulo). Todos esos vectores de la clase de equivalencia tienen el mismo nombre y, por supuesto, las mismas coordenadas en una determinada base.

Deberemos tener en cuenta las operaciones interna y externa definidas en V_3 con las que se cumplen las propiedades necesarias para tener estructura de $\mathbb{R}$ - espacio vectorial.

En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ asignaremos coordenadas a los puntos a través de sus vectores de posición en un determinado sistema de referencia.

Sistemas de referencia en el espacio:

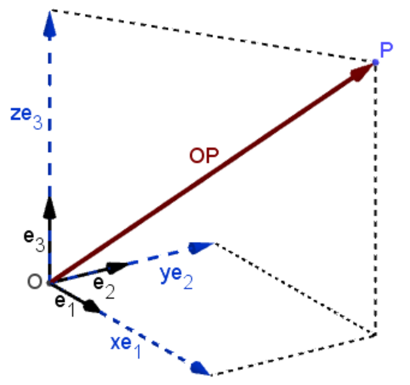
Un Sistema de Referencia en el espacio lo constituyen un punto $O \in \mathbb{R}^3$ *y una base* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *del espacio vectorial* V_3 *de los vectores libres del espacio. Lo denotaremos por* $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

El punto $O \in \mathbb{R}^3$ *lo tomaremos como el origen del sistema de referencia, las direcciones de los vectores* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ *y* $\vec{e}_3$ *marcarán las direcciones de los ejes de coordenadas y las longitudes de dichos vectores, la unidad de medida en cada eje.*

Decimos que un sistema de referencia $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *es ortonormal cuando la base* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *es ortonormal, es decir, cuando los vectores* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *tienen longitud 1 y direcciones perpendiculares.*

Llamamos vector de posición del punto $P \in \mathbb{R}^3$ *al vector* $\overrightarrow{OP} \in V_3$ *que tiene su origen en O y su extremo en P.*

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\mathbb{R}^3$ *y los vectores de* V_3 *de tal forma que a todo punto* $P \in \mathbb{R}^3$ *le corresponde un único vector de posición* $\overrightarrow{OP} \in V_3$ *y a todo vector* $\vec{v} \in V_3$ *le corresponde un único punto* $P \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

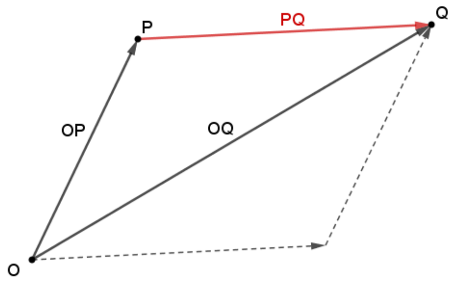


Por tanto, si $\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \Rightarrow \overrightarrow{OP}$ *viene determinado por las coordenadas* $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ *en la base B de forma única y podemos asignar esas mismas coordenadas al punto* $P(x, y, z)$ *que lo identificarán de forma única en el sistema de referencia R.*

Si en el sistema de referencia $R=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ sólo cambiamos el punto O por otro punto O', obtenemos un nuevo sistema de referencia respecto del cual no han cambiado las coordenadas de los vectores de V_3, pero todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ han cambiado de coordenadas.
Si en el sistema de referencia $R=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ cambiamos la base (aunque sólo sea el orden de los vectores), todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ y los vectores de V_3 cambian de coordenadas.

Vector determinado por dos puntos:

Dado un sistema de referencia en el espacio $R=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ y dos puntos $P,Q\in\mathbb{R}^3$ y teniendo en cuenta la definición de la operación interna (suma de vectores) en el espacio vectorial V_3, los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{PQ}$ están relacionados por $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$



Si $P(x_0,y_0,z_0) \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(x_0,y_0,z_0) \Rightarrow \overrightarrow{OP}=x_0\vec{e}_1+y_0\vec{e}_2+z_0\vec{e}_3$

$Q(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$

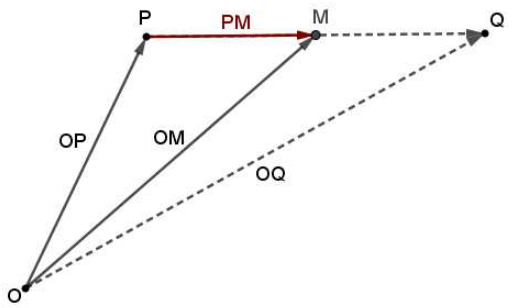
con lo que $\overrightarrow{PQ}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3-(x_0\vec{e}_1+y_0\vec{e}_2+z_0\vec{e}_3) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{PQ}=(x_1-x_0)\vec{e}_1+(y_1-y_0)\vec{e}_2+(z_1-z_0)\vec{e}_3$$

Entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene coordenadas $\overrightarrow{PQ}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$.

Punto medio de un segmento:

Dado un sistema de referencia en el espacio $R=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ y dos puntos $P,Q\in\mathbb{R}^3$ que determinan los extremos de un segmento, veamos cómo calcular las coordenadas de su punto medio M.
Las coordenadas de M están asociadas a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OM}$



Si $P(x_0,y_0,z_0)$ y $Q(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(x_0,y_0,z_0)$ y $\overrightarrow{OQ}=(x_1,y_1,z_1)$

con lo que $\overrightarrow{PQ}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$

Tenemos la relación $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM} \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

Trabajando sólo en coordenadas, obtenemos:

$$\overrightarrow{OM}=(x_0,y_0,z_0)+\frac{1}{2}(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$$

$$\overrightarrow{OM}=\left(x_0+\frac{x_1-x_0}{2},y_0+\frac{y_1-y_0}{2},z_0+\frac{z_1-z_0}{2}\right)$$

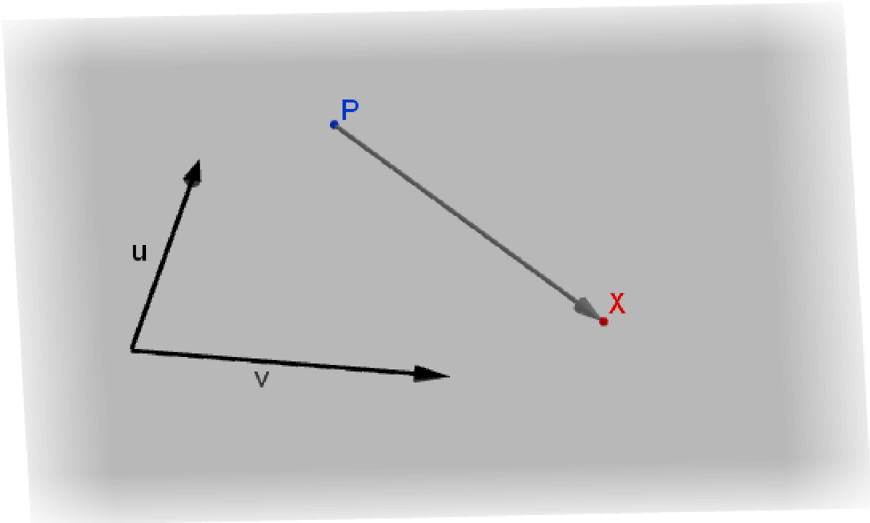
$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2}\right)$$

Del mismo modo podríamos calcular las coordenadas de los puntos que dividen en n partes iguales un segmento de extremos P y Q.

Ecuaciones de un plano en el espacio:

Un plano en el espacio viene determinado por un punto y dos direcciones diferentes. Veamos como traducimos esas premisas a ecuaciones.

Si π es el plano que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y con la dirección de los vectores $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$, cualquier punto $X \in \pi$ cumplirá $\overrightarrow{PX}=\lambda \cdot \vec{u}+\mu \cdot \vec{v}$, es decir, el vector $\overrightarrow{PX}$ debe ser combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puesto que en un plano no puede haber más de dos vectores linealmente independientes.



$$\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=\lambda \cdot \vec{u}+\mu \cdot \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda \cdot \vec{u}+\mu \cdot \vec{v}$$ *que es la ecuación vectorial del plano π.*

Si expresamos esta ecuación en coordenadas, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ es un punto cualquiera}, X(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OX}=(x, y, z) \\ P \text{ es un punto fijo } P(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(x_0, y_0, z_0) \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda \cdot(u_1, u_2, u_3)+\mu \cdot(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow$$

$$(x, y, z)=(x_0+\lambda u_1+\mu v_1,\ y_0+\lambda u_2+\mu v_2,\ z_0+\lambda u_3+\mu v_3) \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=y_0+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=z_0+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$$ *que son las ecuaciones paramétricas del plano π.*

Como los vectores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y $\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$, tenemos que, colocados en filas o en columnas y en cualquier orden, la siguiente ecuación identifica al plano π:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$ *desarrollando el determinante obtendremos una expresión de la forma $Ax+By+Cz+D=0$*

$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ es la ecuación implícita del plano π y $\vec{\eta}=(A, B, C)$ es un vector con dirección perpendicular al plano π que llamamos vector normal al plano.

Ecuaciones de una recta en el espacio:

Una recta en el espacio viene determinada por un punto y una dirección. Veamos como traducimos esas premisas a ecuaciones.

Si r es la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ *y con la dirección del vector* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, *cualquier punto* $X \in r$ *cumplirá* $\overrightarrow{PX} = \lambda \cdot \vec{v}$, *es decir, los vectores* $\overrightarrow{PX}$ *y* $\vec{v}$ *tendrán igual dirección y, por tanto, serán proporcionales.*

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v}$$ *que es la ecuación vectorial de la recta r.*

Si expresamos esta ecuación en coordenadas, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ es un punto cualquiera, } X(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OX} = (x, y, z) \\ P \text{ es un punto fijo } P(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda v_1,\ y_0 + \lambda v_2,\ z_0 + \lambda v_3) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$ *que son las ecuaciones paramétricas de la recta r.*

Despejando λ *en las tres igualdades* $\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_0}{v_1} \\ \lambda = \dfrac{y - y_0}{v_2} \\ \lambda = \dfrac{z - z_0}{v_3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}$ *que es la ecuación continua de r.*

Así mismo, podríamos expresar la recta r como corte entre dos planos de los infinitos que la contienen.

Si $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ *y* $\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ *son dos planos que contienen a una recta r, podemos expresarla como* $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$. *Resolviendo el sistema compatible indeterminado obtendríamos las ecuaciones paramétricas de r.*

El vector director de la recta, $\vec{v}$, *es perpendicular a los vectores normales de ambos planos,* $\vec{\eta}_1 = (A, B, C)$ *y* $\vec{\eta}_2 = (A', B', C')$.