# PROBABILIDAD.

SUCESOS ASOCIADOS A UN EXPERIMENTO ALEATORIO

Un fenómeno o experimento se dice aleatorio si puede dar lugar a varios resultados sin que, en general, pueda ser posible anunciar con certeza cuál de estos va a ser observado en una realización del experimento.

Los sucesos asociados a un experimento aleatorio están caracterizados por su ocurrencia o no respecto de cualquier resultado que observemos al realizarse el experimento aleatorio. La familia de sucesos asociada a un experimento aleatorio la representamos por $\mathcal{A}$.

Se llama espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, y lo representamos por Ω, al conjunto de los resultados que se puedan producir.

- Lanzamiento de un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lanzamiento de una moneda: $\Omega = \{c, +\}$
- Lanzamiento de una moneda dos veces: $\Omega = \{cc,\ c+,\ +c,\ ++\}$
- Número de hijos de una familia: $\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n\}$

Si cada suceso $A \in \mathcal{A}$ lo representamos por el conjunto de resultados que permiten afirmar su ocurrencia, entonces cada suceso podrá considerarse que es un subconjunto del espacio muestral.
Así los sucesos asociados al lanzamiento de un dado $A = \{sacar\ \ par\}$, $B = \{sacar\ impar\}$, se representan por $A = \{2,\ 4,\ 6\}$ y $B = \{1,\ 3,\ 5\}$.

- Se denomina suceso imposible a un suceso que nunca ocurre y se representa por $\emptyset$.
- Se llama suceso seguro al que siempre ocurre y se denota por Ω.
- Se llama suceso contrario del suceso $A$, al que ocurre precisamente si no ocurre $A$ y se representa por $A^c$ o por $\overline{A}$.
- Se llama suceso $A$ unión con $B$ y se representa por $A \cup B$, al que ocurre siempre que ocurre $A$ o siempre que ocurre $B$, y sólo en estos casos.
- Se llama suceso $A$ intersección con $B$ y se designa por $A \cap B$, al que ocurre precisamente si ocurren $A$ y $B$ simultáneamente.
- Se llama suceso diferencia de $A$ y $B$ y se escribe $A - B$, al que ocurre únicamente cuando ocurre $A$ y no ocurre $B$. Claramente $A - B \neq B - A$.

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio "lanzamiento de un dado", el suceso $\{sacar\ un\ valor\ mayor\ que\ 10\}$ es un suceso imposible; $\{sacar\ un\ valor\ menor\ que\ 10\}$ es un suceso seguro.
Sea $A$ el suceso $\{sacar\ \ par\}$, $A = \{2,\ 4,\ 6\}$, su suceso contrario es $\{sacar\ impar\}$, $A^c = \{1,\ 3,\ 5\}$.
Si $A$ es el suceso $\{sacar\ \ par\}$, $A = \{2,\ 4,\ 6\}$, y $B$ el suceso $\{sacar\ valor\ mayor\ que\ 3\}$, $B = \{4,\ 5,\ 6\}$, entonces:

- $A \cup B$ es $\{sacar\ valor\ mayor\ que\ 3\ o\ \ par\}$, $A \cup B = \{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
- $A \cap B$ es $\{sacar\ valor\ mayor\ que\ 3\ y\ \ par\}$, $A \cap B = \{4,\ 6\}$.
- $A - B$ es $\{sacar\ valor\ \ par\ que\ no\ sea\ mayor\ que\ 3\}$, $A - B = \{2\}$.
- $B - A$ es $\{sacar\ valor\ mayor\ que\ 3\ que\ no\ sea\ \ par\}$, $B - A = \{5\}$.

Dos sucesos $A$ y $B$ son incompatibles si su intersección es el suceso imposible, $A \cap B = \varnothing$. Si el suceso intersección de $A$ con $B$ no es imposible, $A \cap B \neq \varnothing$, se dice que $A$ y $B$ son sucesos compatibles entre sí.

## CONCEPTO CLÁSICO DE PROBABILIDAD

Dado un suceso $A$ y un resultado $r$, se dice que $r$ es un "caso favorable" si $r \in A$; si no, se dice que es un "caso desfavorable". Cualquier resultado se considera que es "un caso posible".

### *Regla de Laplace*

La probabilidad de un suceso $A$ es el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Bajo la concepción clásica, las probabilidades tienen las siguientes propiedades:

- La probabilidad de cualquier suceso es un número racional comprendido entre 0 y 1
- La probabilidad del suceso imposible es 0 y la del suceso seguro 1.
- Si $A$ y $B$ son **sucesos incompatibles**, entonces la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades.
- La probabilidad de cada resultado es 1/n, siendo n el número de casos posibles.

También existe un concepto frecuentista de probabilidad, basado en la frecuencia con que ocurren los resultados de un experimento aleatorio y la estabilidad de las frecuencias relativas cuando el experimento se realiza un número ilimitado de veces (Ley del azar).

Ambas concepciones presentan ciertas limitaciones de tipo práctico; por ejemplo, para la concepción clásica el espacio muestral Ω debe ser un conjunto finito y los resultados equiposibles. Esto nos lleva a definir la probabilidad de una forma axiomática.

## AXIOMAS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Dado un experimento o fenómeno aleatorio, con espacio muestral Ω y álgebra (conjunto) de sucesos $\mathcal{A}$, se define la probabilidad como cualquier aplicación $P: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando:

Axioma I. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Axioma II. $P(\Omega) = 1$.

Axioma III. Si A y B son incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

*Consecuencias de los axiomas:*

- $P(\varnothing)=0$
- $P(A^c)=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$
- En general, la probabilidad de la unión de una serie de sucesos es la *suma de las probabilidades de los sucesos* ***menos*** *las probabilidades de las dobles intersecciones* ***más*** *las probabilidades de las triples intersecciones* ***menos*** *las probabilidades de las cuádruples intersecciones ……etc.*
- Si $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sea $P$ una probabilidad sobre un álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, y $A\in\mathcal{A}$ un suceso de probabilidad no nula, $P(A)>0$. De un modo intuitivo, entendemos por probabilidad de un suceso $B$ condicionado por $A$, y la representaremos por $P(B/A)$, a la probabilidad de que ocurra $B$ supuesto que haya ocurrido $A$. Por tanto, dicha probabilidad será una cierta medida de cómo $B$ es implicado por $A$.

Así la probabilidad del suceso $B$ puede resultar modificada si se sabe que se ha presentado el suceso $A$. Esta nueva probabilidad que llamamos *probabilidad de B condicionado por A* se define como:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Esta probabilidad satisface los axiomas del apartado anterior (con $P(A)>0$), es decir:

I. $P(B/A)\ge 0$ para todo suceso $B\in\mathcal{A}$
II. $P(\Omega/A)=1$
III. Si B y C son sucesos incompatibles, entonces $P(B\cup C/A)=P(B/A)+P(C/A)$

Dos sucesos $A$ y $B$ se dicen independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Esta definición la podemos expresar de otra forma:

- Sean $A$ y $B$ dos sucesos con $P(A)>0$. Entonces $A$ y $B$ son independientes precisamente si $P(B/A)=P(B)$, es decir, el hecho de que haya ocurrido $A$ no influye en la probabilidad que tenía $B$.

Si $A$ y $B$ son independientes, entonces también lo son $A$ y $B^c$, $A^c$ y $B$, $A^c$ y $B^c$.

ALGUNOS TEOREMAS NOTABLES

*Regla del producto*

Si $A_1$, $A_2$, $A_3$,......., $A_n \in \mathcal{A}$ y $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ....... \cap A_{n-1}) > 0$ entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ....... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot \text{ ..........} \cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ....... \cap A_{n-1})$$

*Teorema de la probabilidad total*

Si $A_1$, $A_2$, $A_3$,......., $A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos, de probabilidades no nulas y cuya unión es el suceso seguro, entonces, para cualquier otro suceso $B$ se verifica que:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

Es decir,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + P(A_3) \cdot P(B / A_3) + .......... + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$$

*Teorema de Bayes*

Si $A_1$, $A_2$, $A_3$,......., $A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos, de probabilidades no nulas, cuya unión es el suceso seguro, y $B$ es un suceso de probabilidad no nula, entonces, para cada $A_j$

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$