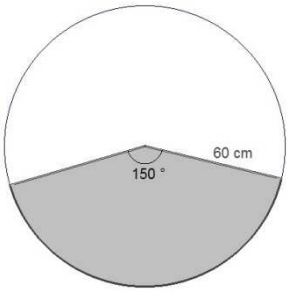
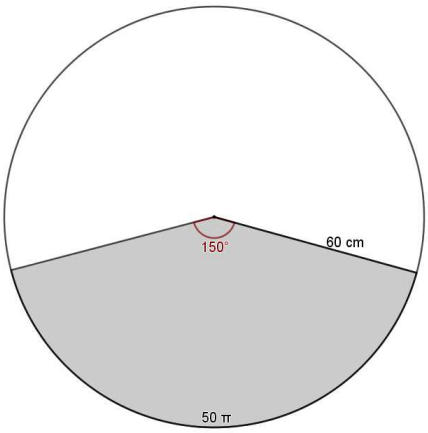
25/05/2020

Ejercicio 1

De un disco de chapa de 60 cm de radio, cortamos un sector circular de 150º de amplitud para construir un vaso cónico. Calcula, en litros, la capacidad de dicho vaso.



Solución:



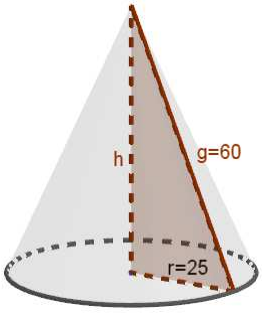
La longitud de arco del sector circular es proporcional a la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{150^\circ} = \frac{2\cdot\pi\cdot 60}{360^\circ} \quad \rightarrow \quad l = \frac{2\cdot\pi\cdot 60\cdot 150^\circ}{360^\circ} = 50\pi \ cm$$

Esa longitud, enrollada, es la que va a formar la circunferencia de la base del cono. Si esa circunferencia tiene radio r $\rightarrow \quad 2\pi r = 50\pi \quad \rightarrow \quad r = \frac{50\pi}{2\pi} \quad \rightarrow \quad r = 25 \ cm$

El radio del disco de chapa coincide con la generatriz del cono, aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, encontraremos la altura, h, del cono:

$$h^2 + 25^2 = 60^2 \quad \rightarrow \quad h^2 + 625 = 3600 \quad \rightarrow \quad h^2 = 3600 - 625 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{2975} \simeq 54,54 \ cm$$



Ahora tenemos todos los datos necesarios para calcular el volumen del cono:

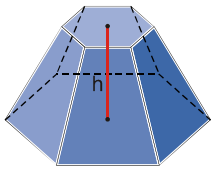
$$V_{cono} = \frac{A_{base}\times altura}{3} = \frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3} = \frac{\pi\cdot 25^2\cdot 54,54}{3} \quad \rightarrow \quad V_{cono} = 35698,7 \ cm^3$$

Como nos piden la capacidad en litros $\rightarrow \quad 35698,7 \ cm^3 = 35,6987 \ dm^3$

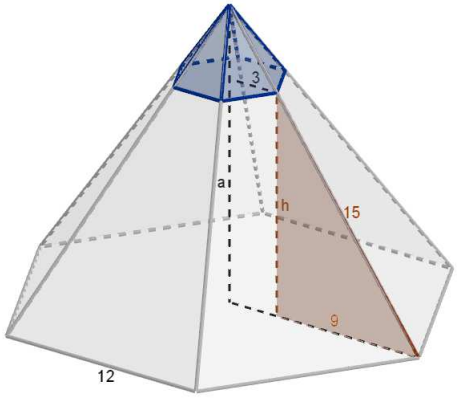
La capacidad del vaso cónico será, aproximadamente, de 35,7 litros.

Ejercicio 2

Calcula el volumen y la superficie total de un tronco de pirámide de bases hexágonos regulares y medidas: Arista de la base mayor 12 cm, arista de la base menor 3 cm, arista lateral 15 cm.



Solución:



Para calcular el volumen del tronco de pirámide, hallaremos el volumen de la pirámide completa y le restaremos el volumen de la pirámide que falta (en el dibujo lateral, la pirámide azul).

Necesitamos calcular la altura de ambas pirámides, para ello aplicaremos Los teoremas de Pitágoras y Tales.

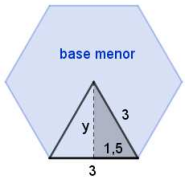
En el triángulo rectángulo sombreado, interior a la pirámide, calculamos la altura del tronco, h:

$h^2+9^2=15^2 \quad \rightarrow \quad h^2+81=225 \quad \rightarrow \quad h^2=225-81 \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{144}=12\ cm$

Ahora, por semejanza, hallamos la altura de la pirámide completa, a:

$\frac{a}{12}=\frac{12}{9} \quad \rightarrow \quad a=\frac{12\cdot 12}{9} \quad \rightarrow \quad a=16\ cm$

Entonces, la altura de la pirámide azul será $a'=a-h=16-12 \quad \rightarrow \quad a'=4\ cm$

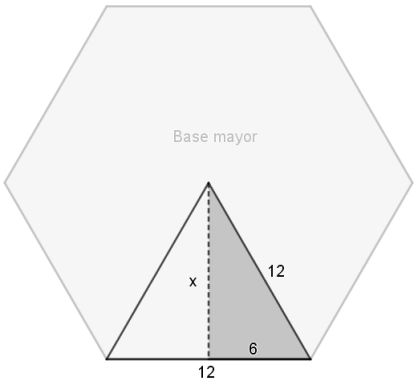


Tenemos que calcular el área de las dos bases del tronco de pirámide, que son hexágonos regulares. Cada hexágono lo dividimos en 6 triángulos equiláteros. Calculamos el área de esos triángulos.

$y^2+1,5^2=3^2 \quad \rightarrow \quad y=\sqrt{9-2,25}\simeq 2,6\ cm \quad \rightarrow \quad A_{base\ menor}=6\cdot A_{triángulo}=6\cdot\frac{3\cdot 2,6}{2}=23,4\ cm^2$

$x^2+6^2=12^2 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{144-36}\simeq 10,39\ cm \quad \rightarrow \quad A_{Base\ mayor}=6\cdot A_{triángulo}=6\cdot\frac{12\cdot 10,39}{2}=374,04\ cm^2$

$V_{tronco}=V_{pirámide\ grande}-V_{pirámide\ pequeña}=\frac{1}{3}\cdot 374,04\cdot 16-\frac{1}{3}\cdot 23,4\cdot 4=1963,68\ cm^3$

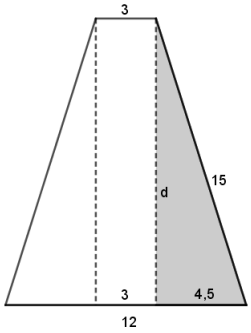


Para la superficie exterior sumaremos el área de las dos bases y las 6 caras laterales que son trapecios isósceles.

Calculamos d, altura del trapecio: $d^2+4,5^2=15^2 \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{15^2-4,5^2}=14,31\ cm$

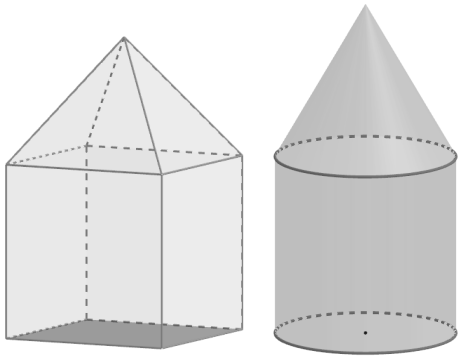
$A_{trapecio}=\frac{(12+3)\cdot 14,31}{2}=107,325\ cm^2$

$A_{total}=A_{Base\ mayor}+A_{base\ menor}+6\cdot A_{trapecio}=374,04+23,4+6\cdot 107,325=1041,39\ cm^2$

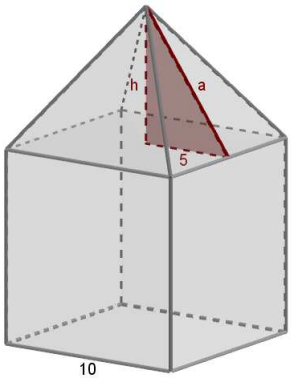


Ejercicio 3

De las siguientes figuras, una tiene todas sus aristas iguales de 10 dm de longitud y la otra, tiene generatrices y diámetro de la base iguales, también de 10 dm. Compara sus volúmenes y sus superficies exteriores.



Solución:



La primera figura está formada por un cubo y una pirámide de base cuadrada.

$V_{figura1} = V_{cubo} + V_{pirámide}$

Tenemos que calcular la altura, h, de la pirámide. Para ello, hallamos la altura del triángulo equilátero, de lado 10 dm, de una de sus caras laterales:

$a^2 + 5^2 = 10^2 \;\rightarrow\; a^2 + 25 = 100 \;\rightarrow\; a^2 = 75 \;\rightarrow\; a = \sqrt{75} = 8,66\ dm$

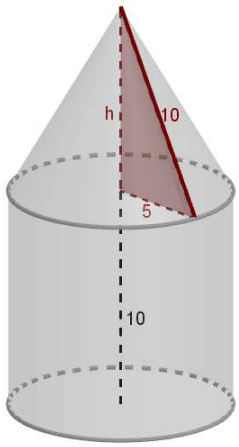
Ahora, h es un cateto del triángulo rectángulo sombreado en la pirámide:

$h^2 + 5^2 = a^2 \;\rightarrow\; h^2 + 25 = 75 \;\rightarrow\; h^2 = 50 \;\rightarrow\; h = \sqrt{50} = 7,07\ dm$

$V_{figura1} = V_{cubo} + V_{pirámide} = 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7,07 \;\rightarrow\; V_{figura1} = 1235,67\ dm^3$

La superficie exterior de la figura 1 está formada por 5 cuadrados de lado 10 dm y 4 triángulos equiláteros de lado 10 dm.

$S_{figura1} = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 8,66}{2} \;\rightarrow\; S_{figura1} = 673,2\ dm^2$



La segunda figura está formada por un cilindro y un cono.

$V_{figura2} = V_{cilindro} + V_{cono}$

Tenemos que calcular la altura, h, del cono. Para ello, utiliamos el teorema de Pitágoras, puesto que h es un cateto del triángulo rectángulo sombreado en el cono:

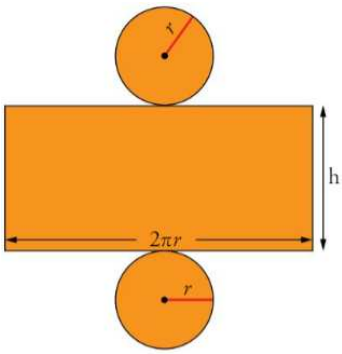
$h^2 + 5^2 = g^2 \;\rightarrow\; h^2 + 25 = 100 \;\rightarrow\; h^2 = 75 \;\rightarrow\; h = \sqrt{75} = 8,66\ dm$

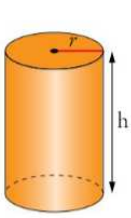
$V_{figura2} = V_{cilindro} + V_{cono} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8,66 \;\rightarrow\; V_{figura2} = 1012,12\ dm^3$

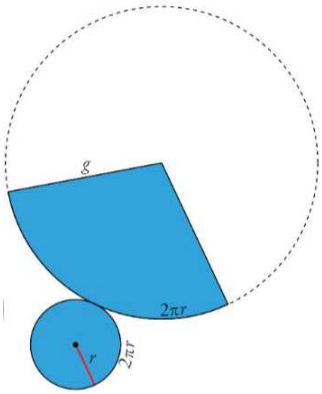
La superficie exterior de la figura 2 está formada por un círculo de radio 5 dm, El área lateral del cilindro que es un rectángulo y el área lateral del cono que es un sector circular.

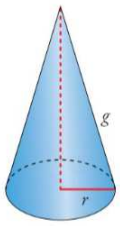
$S_{figura1} = A_{círculo} + A_{rectángulo} + A_{sector} = \pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10 + \pi \cdot 5 \cdot 10 = 175\pi \;\rightarrow\; S_{figura2} = 549,78\ dm^2$

La primera figura tiene mayor volumen y mayor superficie que la segunda figura.



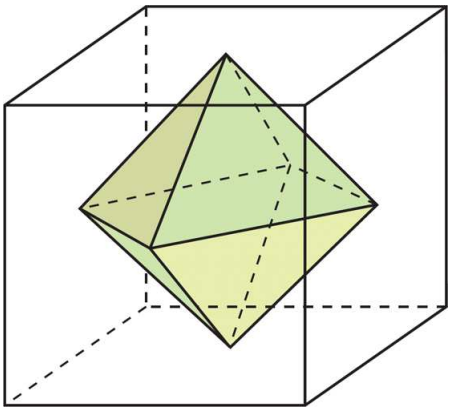




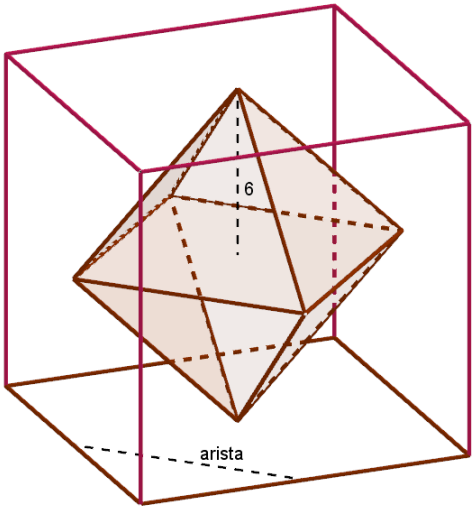


Ejercicio 4

En un cubo de 12 cm de arista introducimos un octaedro de forma que los vértices de este se apoyen en los puntos medios de las caras del cubo. Calcula el volumen y la superficie exterior de dicho octaedro.



Solución:



La arista del octaedro es el segmento que une los puntos medios de dos caras consecutivas. Esa longitud coincide con el segmento que une los puntos medios de los lados de una de las caras del cubo.

$a^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow a^2 = 72 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 6\sqrt{2}\ cm$

Para calcular el volumen del octaedro, lo consideramos como dos pirámides unidas por su base. La altura de una de esas pirámides es la mitad de la arista del cubo.

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144\ cm^3$

$V_{octaedro} = 2 \cdot V_{pirámide} = 288\ cm^3$

Para la superficie exterior, calculamos el área de una cara $\left(\text{triángulo equilátero de lado } a = 6\sqrt{2}\right)$ *y la multiplicamos por* 8. *Llamamos x a la altura de una de esas caras*:

$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 + 18 = 72 \rightarrow a = \sqrt{54} \simeq 7{,}35\ cm$

$A_{cara} = \frac{\sqrt{72} \cdot \sqrt{54}}{2} \simeq 31{,}18\ cm^2 \quad \rightarrow \quad S_{octaedro} = 8 \cdot A_{cara} = 249{,}4\ cm^2$