

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 22 de abril de 2006

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

iii Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

- * No pases la página hasta que se te indique.
- * Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
- * No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
- * Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
- * No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	2 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

- * **MARCA CON UNA CRUZ (X) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
- * **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
Ediciones S.M. - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Si la media aritmética de dos números es 6 y la raíz cuadrada de su producto es 5, una ecuación cuyas soluciones son esos números es:

- A) $x^2 + 12x + 25 = 0$ B) $x^2 + 6x + 25 = 0$ C) $x^2 - 12x - 5 = 0$
D) $x^2 - 6x + 25 = 0$ E) $x^2 - 12x + 25 = 0$

2 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3$?

- A) Ninguna B) Una C) Dos D) Tres E) Más de tres

3 AB es un diámetro de una circunferencia de centro O . C es un punto de la circunferencia tal que el ángulo BOC es 60° . Si el diámetro de la circunferencia mide 5 cm, la longitud de la cuerda AC , expresada en cm, es:

- A) 3 B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D) $3\sqrt{3}$ E) Nada de lo anterior

4 La longitud de la cuerda común a dos circunferencias es 16 cm. Si los radios de dichas circunferencias son 10 y 17 cm, la distancia entre los centros de esas circunferencias, expresada en cm, es:

- A) 27 B) 21 C) $\sqrt{389}$ D) 15 E) No se puede saber

5 Si $x = (\log_8 2)^{(\log_8 8)}$ entonces $\log_3 x$ es igual a:

- A) -3 B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 9

6 Si la suma de dos números es 1 y su producto también es 1, la suma de sus cubos es:

- A) 12 B) $-2 - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ C) 0 D) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$ E) -2

7 Las longitudes de los lados del rectángulo $ABCD$ son 5 y 3 cm. Si los puntos E y F dividen a la diagonal AC en tres segmentos iguales, el área del triángulo BEF , en cm^2 , es:

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{1}{3}\sqrt{34}$ E) $\frac{1}{3}\sqrt{68}$

8 Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética 8, 12, ... y T_n la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética 17, 19, ... Entonces $S_n = T_n$ para:

- A) Ningún valor de n B) Un valor de n C) Dos valores de n
 D) Tres valores de n E) Más de tres valores de n

9 Si $f(n+1) = \frac{2f(n)+1}{2}$, para $n = 1, 2, \dots$ y $f(1) = \frac{1}{2}$ entonces $f(2006)$ es igual a:

- A) 1001 B) 1002 C) 1003 D) $\frac{4013}{2}$ E) $\frac{2005}{2}$

10 Si m es un entero positivo y las rectas $y = mx - 1$ y $13x + 11y = 700$, se cortan en un punto reticular (de coordenadas enteras), m puede ser:

- A) Solamente 4 B) Solamente 5 C) Solamente 6
 D) Alguno de los enteros 4, 5, 6 y otro entero positivo
 E) Tiene infinitas posibilidades

11 En una recta tomamos 5 puntos O, A, B, C y D , de manera que las distancias $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$ verifican $a < b < c < d$. Si P es un punto de esa recta entre B y C tal que $\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PC}$, OP es igual a:

- A) $\frac{b^2 - bc}{a - b + c - d}$ B) $\frac{ac - bd}{a - b + c - d}$ C) $\frac{bd + ac}{a - b + c - d}$
 D) $\frac{b^2 - bc}{a - b + c - d}$ E) $\frac{ad - bc}{a - b + c - d}$

12 Si el área del triángulo ABC es 64 cm^2 y la media geométrica de los lados AB y AC es 12 cm, el seno del ángulo \hat{A} es igual a:

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{15}{17}$

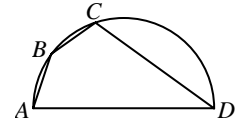
13 Encima de un tablero de ajedrez (8×8) dibujamos el círculo inscrito. ¿Cuántos cuadros del tablero están totalmente cubiertos por el círculo?

- A) 48 B) 44 C) 40 D) 36 E) 32

14 Si $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ con $-1 < x < 1$, $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ es igual a:

- A) $-f(x)$ B) $2f(x)$ C) $3f(x)$ D) $[f(x)]^2$ E) $[f(x)]^2 - f(x)$

15 En el semicírculo de la figura, de diámetro $AD = 4$, inscribimos el cuadrilátero $ABCD$ con $AB = BC = 1$. ¿Cuánto mide el lado CD ?



- A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{13}$
 E) $2\sqrt{3}$

16 Si P es el producto de n números en progresión geométrica, S su suma y S' la suma de sus inversos, entonces P , en términos de S y S' , es:

- A) $(S \cdot S')^{\frac{n}{2}}$ B) $\left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}$ C) $(S \cdot S')^{n-2}$ D) $\left(\frac{S}{S'}\right)^n$ E) $\left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

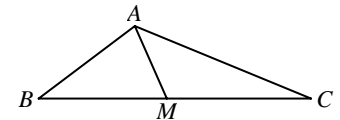
17 Tenemos dos cartas: una con ambas caras rojas y otra con una cara roja y otra azul. Elegimos una al azar y la ponemos encima de la mesa. Si la cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara de esa carta sea también roja?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

18 Lanzamos un dado seis veces. La probabilidad de obtener un número mayor o igual que 5 al menos cinco veces es:

- A) $\frac{13}{729}$ B) $\frac{12}{729}$ C) $\frac{2}{729}$ D) $\frac{3}{729}$ E) Nada de lo anterior

19 En el triángulo ABC de la figura, $AB = 4$ y $AC = 8$. Si M es el punto medio de BC y $AM = 3$, ¿cuál es la longitud de BC ?



- A) $2\sqrt{26}$ B) $2\sqrt{31}$ C) 9

- D) $4 + 2\sqrt{13}$ E) No hay datos suficientes

20 Sea $f(x)$ una función definida para todos los números reales tal que $f(x) > 0$ y $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas?

I. $f(0) = 1$ II. $f(-a) = \frac{1}{f(a)}$ III. $f(a) = \sqrt[3]{f(3a)}$ IV. Si $b > a, f(b) > f(a)$

- A) Solamente III y IV B) Solamente I, III y IV C) Solamente I, II y IV
 D) Solamente I, II y III E) Todas son verdaderas

21 Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: "En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra". ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

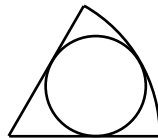


- A) Ninguna B) Una C) Dos D) Tres E) Cuatro

22 Una de las siguientes funciones es par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas. ¿Cuál?

- A) $y = x^2 + x$ B) $y = x^3$ C) $y = x \cos x$ D) $y = x \operatorname{sen} x$ E) $y = x^2 \operatorname{sen} x$

23 En la figura que te mostramos, el cociente entre el radio del sector y el del círculo inscrito en ese sector es 3. ¿Cuál es el cociente entre el área del sector y el área del círculo?



- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{6}{5}$
 E) $\frac{5}{4}$

24 En mi centro, hace dos años fueron a la Universidad 30 chicos más que chicas. El año pasado, el número de estudiantes que fueron a la Universidad aumentó un 10 %: el de chicas aumentó un 20 % y el de chicos un 5 %. ¿Cuántos estudiantes de mi centro fueron a la Universidad el año pasado?

- A) 88 B) 99 C) 110 D) 121 E) 132

25 Sean a y b los dos primeros números primos mayores que 2006^{2006} . ¿Qué fracción de las siguientes representa un número mayor?

- A) $\frac{a}{b-1}$ B) $\frac{a}{b+1}$ C) $\frac{2a}{2b+1}$ D) $\frac{2a}{2b-1}$ E) $\frac{3a}{3b+1}$