XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2012

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\textbf{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 Al intentar multiplicar los enteros positivos *a* y *b*, siendo *a* un número de dos cifras, Errol cambió el orden de las cifras de *a* y obtuvo como resultado 161. ¿Cuál es el resultado correcto de $a \cdot b$?

A) 116 **B)** 161 **C)** 204 **D)** 214 **E)** 224

2 Si $f(x) = 3^x + 5$, el dominio de f^{-1} es:

A) $(0, +\infty)$ **B)** $(5, +\infty)$ **C)** $(8, +\infty)$ **D)** $(-\infty, +\infty)$ **E)** $(3, +\infty)$

3 ¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación $\sqrt{5|x|+8} = \sqrt{x^2-16}$?

A) – 64 **B)** – 24 **C)** – 9 **D)** 24 **E)** 576

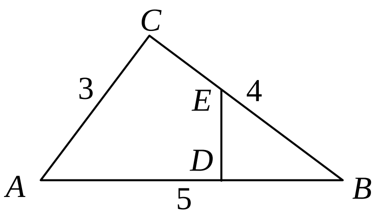
4 Sea $f(x)$ una función tal que $f(x) + 2f(-x) = sen\, x$ para todo número real x. ¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

A) –1 **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** 2

5 De una larga lista de problemas, los alumnos de Marta hicieron en clase un tercio del total y dos más en casa. Al día siguiente volvieron a hacer en clase un tercio de los que les quedaban y en casa otros cuatro más. Si para el tercer día solamente quedaban ocho problemas por hacer, ¿cuántos problemas había en la lista?

A) 30 **B)** 39 **C)** 48 **D)** 57 **E)** 66

6 En el triángulo *ABC* de la figura, de lados 3, 4 y 5, el segmento *DE* es perpendicular al segmento *AB*. Si el área del triángulo *EBD* es un tercio del área del triángulo *ABC*, ¿cuál es la longitud del segmento *DB*?



A) $\frac{4}{3}$ **B)** 5 **C)** $\frac{9}{4}$ **D)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

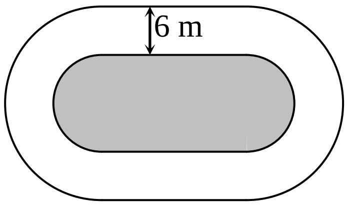
7 Considera el conjunto de números $\{1, 10, 10^2, \ldots, 10^{10}\}$. ¿Cuál es el entero más próximo al cociente entre el mayor elemento del conjunto y la suma de los diez restantes?

A) 1 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 101

8 En una reunión de 52 personas, ¿cuál es el mayor valor de *n* para el que la afirmación “Al menos *n* personas de esta reunión cumplen años el mismo mes” sea siempre verdadera?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 12

9 Esteban corre cada día, siempre a la misma velocidad, dando vueltas a una pista como la de la figura, de 6 m de ancha, rectangular y cerrada por semicircunferencias. Si corre “por fuera” tarda 6 segundos más que si lo hace “por dentro” en dar una vuelta completa. ¿Cuál es la velocidad de Esteban en m/s?



A) π **B)** 2π **C)** $\frac{7\pi}{3}$ **D)** $\frac{8\pi}{3}$ **E)** 3π

10 Seleccionamos al azar dos números reales del intervalo [−20, 10]. ¿Cuál es la probabilidad de que su producto sea positivo?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{2}{3}$

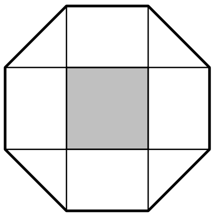
11 ¿Cuál es el perímetro de un parking rectangular de 25 m de diagonal y 168 m^2 de área?

A) 52 m **B)** 58 m **C)** 62 m **D)** 68 m **E)** 70 m

12 Representamos con @ la operación $a@b = \frac{a+b}{2}$ siendo a y b números reales cualesquiera. De las siguientes propiedades, ¿cuáles verifica esta operación?

I: $x@(y+z) = (x@y) + (x@z)$; II: $x + (y@z) = (x+y)@(x+z)$;
III: $x@(y@z) = (x@y)@(x@z)$

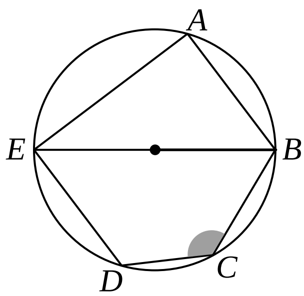
A) Solamente I **B)** Solamente II **C)** Solamente III
D) Solamente I y III **E)** Solamente II y III



13 En una tirada de dardos, la diana tiene forma de octógono regular. Si el dardo puede caer con igual probabilidad en cualquier punto de la diana, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en el cuadrado sombreado?

A) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **E)** $2-\sqrt{2}$

14 En la circunferencia de diámetro EB las cuerdas AB y ED son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?



A) 120º **B)** 125º **C)** 130º **D)** 135º
E) 140º

15 Las rectas r_1 y r_2 son simétricas respecto de la recta $y = x$. Si la ecuación de r_1 es $y = ax + b$ con $a \neq 0$, la ecuación de r_2 es:

A) $y = \frac{1}{a}x + b$ **B)** $y = -\frac{1}{a}x + b$ **C)** $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ **D)** $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ **E)** $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

16 Si las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo vienen dadas por números enteros en progresión aritmética, la longitud de uno de ellos podría ser:

A) 22 **B)** 58 **C)** 81 **D)** 91 **E)** 361

17 Si p, q y M son números positivos y $q < 100$, el número obtenido al crecer M el p % y, posteriormente, bajar el resultado en el q %, es mayor que M si y solo si:

A) $p > q$ **B)** $p > \frac{q}{100-q}$ **C)** $p > \frac{q}{1-q}$ **D)** $p > \frac{100q}{100+q}$ **E)** $p > \frac{100q}{100-q}$

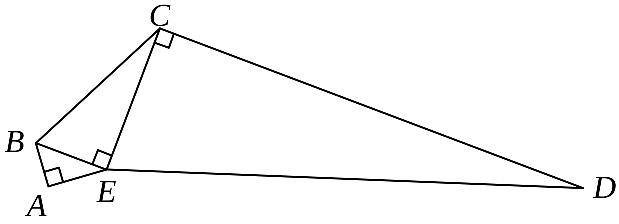
18 Si $b > 1$, $x > 0$ y $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, x es igual a:

A) $\frac{1}{216}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** 1 **D)** 6 **E)** No se puede determinar

19 En un triángulo de lados a, b y c se verifica que $(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$. El valor del ángulo opuesto al lado c es:

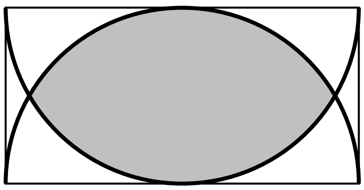
A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 150º

20 En la figura se ven tres triángulos rectángulos. Ninguno de estos triángulos es semejante a ninguno de los otros dos y todos los segmentos de la figura tienen longitud entera, siendo $AB = 3$. Si el área del pentágono $ABCDE$ viene dada por un número de tres cifras, la suma de las cifras de dicho número es:



A) 6 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

21 Si la base del rectángulo mide 4 y la altura 2, ¿cuál es el área de la región sombreada limitada por dos semicircunferencias?



A) $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ **B)** $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

D) $\frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ **E)** $\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

22 En el rectángulo $ABCD$ con $AB = 6$ y $BC = 3$, elegimos un punto M en el lado AB de forma que el ángulo $A\hat{M}D$ sea igual que el ángulo $C\hat{M}D$. ¿Cuánto mide este ángulo?

A) 71º **B)** 72º **C)** 73º **D)** 74º **E)** 75º

23 El área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita al cuadrado cuyos vértices son los afijos de raíces cuartas de – 4 es:

A) 2π **B)** 2 **C)** $\frac{2\pi}{3}$ **D)** π **E)** $\frac{3\pi}{2}$

24 En un torneo de tenis en el que participan N jugadores, el número de jugadores de élite viene dado por la fórmula $2^{1+[\lg_2(N-1)]} - N$, donde $[x]$ significa el mayor entero menor o igual que x. Si en dicho torneo hay 19 jugadores de élite y el número total de jugadores es menor que 120, calcula la suma de todos los posibles valores de N.

A) 38 **B)** 90 **C)** 154 **D)** 406 **E)** 1024

25 Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c enteros. Si $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$, $70 < f(8) < 80$ y $5000k < f(100) < 5000(k + 1)$ para algún entero k, el valor de k es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5