



XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 18 de abril de 2015

NIVEL IV (Bachillerato)

iii Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

Cada respuesta correcta te aportará	5 puntos
Cada pregunta que dejes en blanco	1 punto
Cada respuesta errónea	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En un bombo de lotería quedan $2n$ bolas, la mitad pares y la mitad impares. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

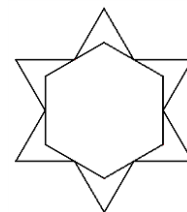
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{n}{2n-1}$ C) $\frac{n}{2n+1}$ D) $\frac{n-1}{2n-1}$ E) $\frac{n-1}{2n}$

2 ¿Cuál es el factorial más pequeño que es múltiplo de 3^{29} ?

- A) 50! B) 54! C) 58! D) 60! E) 63!

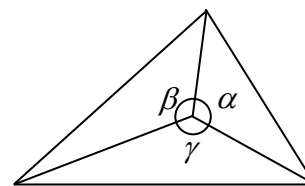
3 Si el lado de la estrella mide 6, ¿cuál es el perímetro del hexágono regular inscrito de la figura?

- A) $24\sqrt{3}$ B) 48 C) $36\sqrt{2}$ D) $27\sqrt{3}$ E) $18\sqrt{6}$



4 Los ángulos de un triángulo miden, 42° , 58° y 80° . El incentro del triángulo forma con los vértices los ángulos, α , β y γ . La mayor diferencia entre dos de estos ángulos es:

- A) 16° B) 19° C) 18° D) 8° E) 9°



5 La suma de todos los productos de dos factores diferentes de los números del 1 al 6 es 175. ¿Cuál es la suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 7?

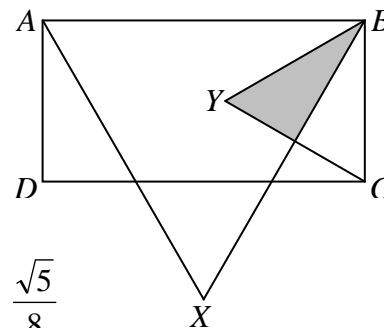
- A) 343 B) 336 C) 329 D) 325 E) 322

6 ¿Cuál es el primer natural, n , que verifica que: $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n > 10$?

- A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

7 En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AB = 2$ y $BC = 1$. Si tanto ABX como BCY son triángulos equiláteros, ¿cuál es el área de la zona sombreada?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{8}$



8 En *Numerolandia* hay exactamente 9 ciudades cuyos nombres son: Uno, Dos, Tres,... y Nueve. El presidente del país decide construir carreteras entre las ciudades de la siguiente forma: dos ciudades distintas tienen una carretera directa que las une, si y sólo si, con sus nombres se puede formar un número de dos cifras múltiplo de 3. (Así por ejemplo, Dos y Uno están unidas puesto que 21 ó 12 es múltiplo de 3, pero en cambio Seis y Cuatro no, pues ni 64 ni 46 son múltiplos de 3). ¿Cuántas carreteras tiene que construir?

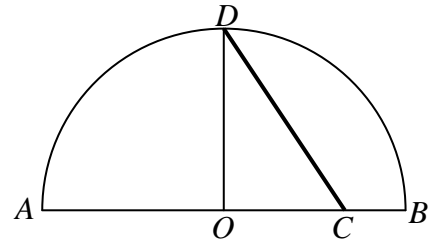
- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

9 En una caja hay dos bolas rojas, dos verdes y dos amarillas, todas de igual tamaño. Alicia coge dos bolas de la caja, luego Bea coge otras dos de las restantes y finalmente Carlos coge las dos últimas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas que coge Carlos sean del mismo color?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

- 10** En la figura adjunta, O es el centro de la semicircunferencia y OD es perpendicular al diámetro AB . Si $AC = a$ y $CB = b$, ¿cuánto vale DC ?

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
 D) $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{2}}$ E) $\frac{a^2}{b}$

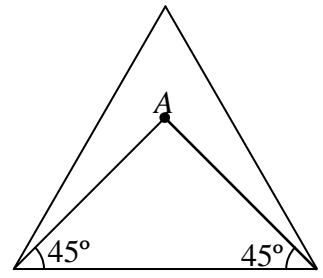


- 11** Si el 50 % de P es el 20 % de Q , ¿qué porcentaje de Q representa P ?

- A) 60 % B) 50 % C) 40 % D) 20 % E) 30 %

- 12** Joaquín tiene un terreno con forma de triángulo equilátero de 1 km de lado como el de la figura. Desea construir una casa en el punto A y caminos perpendiculares a cada lado desde dicho punto. ¿Cuál es, en km, la longitud total de los tres caminos?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) 0,8 C) $0,45\sqrt{5}$ D) 0,85 E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

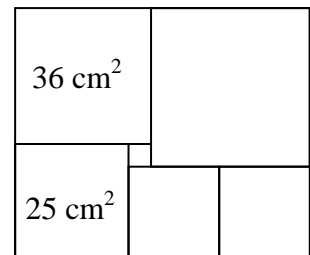


- 13** De la lista formada por $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$ elegimos cuatro números diferentes: a, b, c y d . ¿Cuál es el mayor valor posible para la expresión $a^b + c^d$?

- A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{31}{32}$ D) $\frac{10}{9}$ E) $\frac{26}{25}$

- 14** Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?

- A) 50 B) 44 C) 46 D) 52 E) 48



- 15** En el triángulo isósceles ABC con $AB = AC = x + 1$ y $BC = 2x - 2$, en donde $x > 1$, su área viene dada por la expresión:

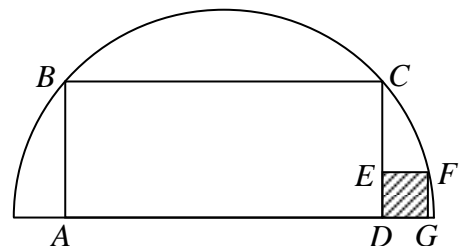
- A) $(x-1)\sqrt{2x^2+2}$ B) $2(x-1)4$ C) $\frac{1}{2}(x+1)^2$ D) $(x+1)(x-1)$ E) $2(x-1)\sqrt{x}$

- 16** ¿Cuál es el área del triángulo determinado por las rectas $y = -2x + 8$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $x + 2 = 0$?

- A) 15 B) 27 C) 30 D) 36 E) 45

- 17** La figura adjunta muestra un rectángulo $ABCD$ inscrito en una semicircunferencia y su diámetro. Las dimensiones del rectángulo son $AB = 12$ y $BC = 28$. Se ha construido un cuadrado $DEFG$ como ves en la figura. ¿Cuál de los siguientes números es el al área del cuadrado $DEFG$?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16



18 La progresión aritmética $\{a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d\}$ de n términos verifica las siguientes propiedades:

- La suma de los términos: primero, tercero, quinto y así sucesivamente hasta llegar al último de la progresión original, es 320.
- La suma de los términos: primero, cuarto, séptimo, décimo y así sucesivamente hasta el último de la progresión original, es 224.

¿Cuál es la suma de todos los términos de la progresión?

- A) 656 B) 640 C) 608 D) 704 E) 672

19 Los puntos de corte de las parábolas $y = ax^2 - 2$ e $y = 4 - bx^2$ ($a > 0$, $b > 0$) con los ejes de coordenadas son los vértices de un cuadrilátero de área 12. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

- A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

20 Si $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} = 1$, ¿cuál es el valor de a ?

- A) 9 B) 12 C) 18 D) 24 E) 36

21 Los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - ax + 2a$ son números enteros. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a ?

- A) 7 B) 8 C) 16 D) 17 E) 18

22 En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara al ser lanzada es de $\frac{1}{4}$. Cuando la lanzamos n veces resulta que tiene la misma probabilidad de obtener dos caras que de obtener tres caras. ¿Cuál es el valor de n ?

- A) 5 B) 8 C) 10 D) 11 E) 13

23 En una circunferencia inscribimos un cuadrilátero $ABCD$ en el que $\hat{BAC} = 70^\circ$, $\hat{ADB} = 40^\circ$, $AD = 4$ y $BC = 6$. ¿Cuál es el valor de AC ?

- A) $3 + \sqrt{5}$ B) 6 C) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ D) $8 - \sqrt{2}$ E) 7

24 El centro de un círculo de radio 2 es a la vez vértice de un triángulo equilátero de lado 4. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la región interior al círculo pero exterior al triángulo y el área de la región interior al triángulo pero exterior al círculo?

- A) $8 - \pi$ B) $\pi + 2$ C) $2\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $4(\pi - \sqrt{3})$ E) $2\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$

25 Para cada número compuesto n definimos $r(n)$ como la suma de los factores en la descomposición en factores primos de n . Por ejemplo, $r(50) = 12$ puesto que $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ y $2 + 5 + 5 = 12$. ¿Cuál es el recorrido de la función $r(n)$?

Nota: El recorrido de $r = \{r(n), \text{ con } n \text{ número compuesto}\}$

- A) Conjunto de enteros positivos B) Conjunto de los números compuestos
C) Conjunto de los pares mayores que 3 D) Conjunto de los enteros mayores que 3
E) Conjunto de los enteros mayores que 4.