



## XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2016

NIVEL IV (Bachillerato)

### iii Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

### PUNTUACIÓN

#### En los problemas 1 a 13:

Cada respuesta <b>correcta</b> te aportará	<b>5 puntos</b>
Cada pregunta <b>en blanco o errónea</b>	<b>0 puntos</b>

#### En los problemas 14 a 25:

Cada respuesta <b>correcta</b> te aportará	<b>5 puntos</b>
Cada pregunta que dejes <b>en blanco</b>	<b>1 punto</b>
Cada respuesta <b>errónea</b>	<b>0 puntos</b>

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA**  LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

#### CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

#### ORGANIZA

Asociación Matemática  
Concurso de Primavera

#### COLABORAN

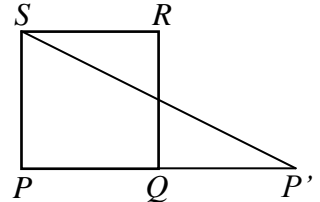
Universidad Complutense de Madrid  
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid  
El Corte Inglés  
Grupo ANAYA  
Grupo SM  
Smartick

- 1** En una asociación benéfica formada por padres, profesores y alumnos de un centro, el 25% del dinero donado proviene de los padres. El resto lo donan entre profesores y alumnos. El cociente entre el dinero donado por los profesores y el donado por los alumnos es  $\frac{2}{3}$ . ¿Cuál es el cociente entre el dinero donado por los padres y el dinero donado por los alumnos?

A)  $\frac{20}{9}$       B)  $\frac{5}{6}$       C)  $\frac{5}{9}$       D)  $\frac{1}{2}$       E)  $\frac{5}{12}$

- 2**  $PQRS$  es un cuadrado y  $P'$  es el punto simétrico de  $P$  respecto de  $Q$ . Si la longitud de  $SP'$  es 90 mm, ¿cuál es, en  $\text{mm}^2$ , el área del cuadrado  $PQRS$ ?

A) 324      B) 1620      C) 1800      D) 2025      E) 2700

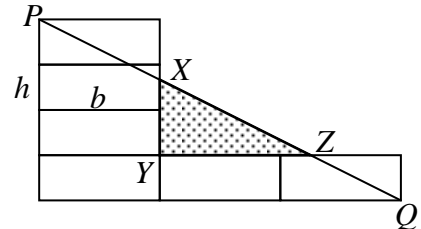


- 3** ¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación  $(x-4)(x-2) + (x-2)(x-6) = 0$ ?

A) 12      B) 20      C) 48      D) 10      E) 96

- 4** Seis rectángulos idénticos, de base  $b$  y altura  $h$ , están colocados como muestra la figura. El segmento  $PQ$  intercepta a un lado vertical de uno de ellos en  $X$  y a un lado horizontal de otro en  $Z$ . Si en el triángulo rectángulo  $XYZ$  se verifica que  $YZ = 2 \cdot XY$ , entonces  $\frac{h}{b}$  es igual a:

A)  $\frac{2}{3}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{3}{8}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{3}{4}$



- 5** ¿Cuántas parejas de enteros positivos  $(p, q)$  con  $p + q \leq 100$  verifican la ecuación  $\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = 17$ ?

A) Ninguna      B) 1      C) 2      D) 4      E) 5

- 6** Si  $30^A = 6$ ,  $30^B = 10$  y  $30^C = 15$  ¿Cuál es la media de  $A, B$  y  $C$ ?

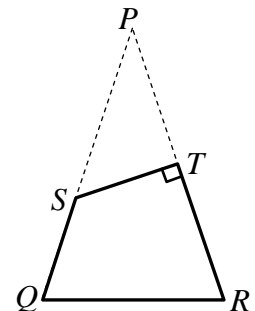
A)  $\frac{4}{9}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{2}{3}$       D)  $\frac{2}{9}$       E)  $\frac{1}{3}$

- 7** Tres vértices de un paralelogramo son los puntos  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 4)$  y  $B(4, 1)$ . ¿Cuál es el área del paralelogramo?

A) 12      B) 15      C) 16      D) 17      E) 19

- 8** En el triángulo isósceles  $PQR$  de la figura,  $PQ = PR$  y  $QR = 300$ . Sobre el lado  $PR$  se toma un punto  $T$  y sobre el  $PQ$  otro punto  $S$  de manera que  $ST$  es perpendicular a  $PR$  y  $ST = 120$ . Si  $TR = 271$ ,  $QS = 221$ , ¿cuál es el área del cuadrilátero  $STRQ$ ?

A) 21 275      B) 40 605      C) 46 860      D) 54 000      E) 54 603



- 9** ¿Cuántos enteros,  $a$ , verifican que  $a^{2015} + a^{2016}$  es múltiplo de 5, con  $1 \leq a \leq 10$ ?

A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**10** Las ordenadas en el origen de tres rectas paralelas son 2, 3 y 4. La suma de las abscisas de los puntos de corte de las rectas con el eje  $OX$  es  $-36$ . ¿Cuál es la pendiente de estas rectas?

- A)  $\frac{1}{3}$       B)  $\frac{2}{9}$       C)  $\frac{1}{6}$       D) 4      E)  $\frac{1}{4}$

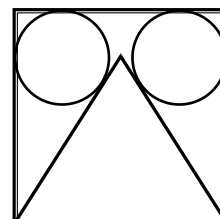
**11** Hay dos valores de  $k$  para los que la ecuación  $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$  tiene una sola raíz real. La suma de estos valores de  $k$  es:

- A) 0      B)  $-3$       C) 3      D)  $-7$       E) 7

**12** Si  $\cos 60^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos \alpha$  con  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , entonces  $\alpha$  es igual a:

- A)  $15^\circ$       B)  $22,5^\circ$       C)  $30^\circ$       D)  $45^\circ$       E)  $60^\circ$

**13** La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?

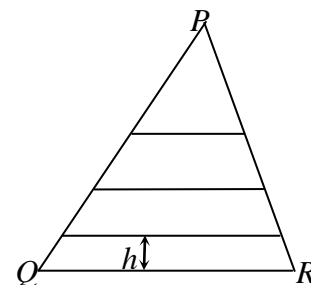


- A) 2      B)  $\sqrt{2}$       C)  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$       D)  $3 - \sqrt{3}$       E)  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

**A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.**

**14** En el triángulo isósceles  $PQR$  de la figura, en el que  $QP = 150$  y  $PR = QR = 125$ , hay tres segmentos paralelos a  $QR$  que lo dividen en cuatro regiones de igual área. La altura  $h$  del trapecio inferior es:

- A)  $60(2\sqrt{3} - 3)$       B)  $60(2 - \sqrt{3})$       C)  $60(\sqrt{2} - 1)$   
 D)  $60(3 - 2\sqrt{2})$       E) 16



**15** Los tres números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$  están, en ese orden, en progresión geométrica. Si su suma es 114 y su producto 46 656, ¿cuál es el valor de  $a + c$ ?

- A) 78      B) 76      C) 54      D) 36      E) 24

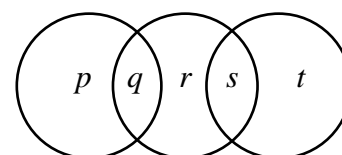
**16** Si  $x^2 = 8x + y$  e  $y^2 = 8y + x$  con  $x \neq y$ , el valor de  $x^2 + y^2$  es:

- A) 9      B) 49      C) 63      D) 21      E) 56

**17** ¿Cuántos enteros hay entre 10 y 1000 que verifican que la suma de sus cifras es 3?

- A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10

**18** En el dibujo que observas,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  y  $t$  representan cinco enteros consecutivos, no necesariamente en ese orden. Los dos enteros del círculo de la izquierda suman 63 y los del círculo de la derecha suman 57. ¿Cuál es  $r$ ?



- A) 20      B) 24      C) 28      D) 30      E) 32

- 19** Hay dos formas de elegir seis números diferentes de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de forma que el producto de estos seis números sea un cuadrado perfecto. Si estos cuadrados son  $m^2$  y  $n^2$  con  $m$  y  $n$  positivos y  $m \neq n$ , ¿cuál es el valor de  $m + n$ ?
- A) 108      B) 91      C) 61      D) 56      E) 144
- 20** Los enteros 789 y 998 no tienen otras cifras que no sean 7, 8 o 9. ¿Cuántos enteros de tres cifras no tienen cifras distintas a 7, 8 o 9?
- A) 6      B) 9      C) 18      D) 36      E) 27
- 21** Los vértices del triángulo  $ABC$  son los puntos de intersección de las rectas  $r: x = 13$ ,  $s: y = 0$ ,  $t: y = \sqrt{3}(x-1)$ . Si la bisectriz interior del ángulo que forman las rectas  $s$  y  $t$  corta a la recta  $r$  en un punto  $D$ , ¿cuál es la ordenada de este punto?
- A)  $4 + \sqrt{3}$       B)  $\sqrt{3}$       C)  $\frac{10}{\sqrt{3}}$       D)  $\frac{12}{\sqrt{3}}$       E)  $6\sqrt{3}$
- 22** Alicia y Bea juegan con una moneda equilibrada lanzando la moneda una vez cada una hasta un máximo de tres lanzamientos cada una. Empieza Alicia y gana la primera que consiga una cara. Si ninguna obtiene cara hay empate. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Alicia?
- A)  $\frac{21}{32}$       B)  $\frac{5}{8}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{11}{16}$       E)  $\frac{9}{16}$
- 23** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son enteros diferentes que verifican las condiciones:
- $a \cdot b \cdot c = 17955$
  - $a$ ,  $b$  y  $c$  están en progresión aritmética (en ese orden)
  - $3a + b$ ,  $3b + c$  y  $3c + a$  están en progresión geométrica (en ese orden)
- ¿Cuál es el valor de  $a + b + c$ ?
- A)  $-63$       B)  $-42$       C)  $-682$       D)  $-48$       E)  $-106$
- 24** ¿Cuántos pares de enteros,  $(x, y)$  con  $0 \leq x \leq y$  verifican la ecuación  $5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624$ ?
- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7
- 25** Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?
- A) 27 240      B) 29 160      C) 27 360      D) 27 600      E) 25 200