Ejercicio 1.

El IVA (impuesto sobre el valor añadido) es un impuesto indirecto que grava el consumo. En España, dependiendo de las características del producto o servicio, se aplican tres tipos de IVA diferentes, el súper reducido, el reducido y el general. La última subida de este impuesto se efectuó en el año 2012.

	IVA general	IVA reducido	IVA súper reducido
31 de agosto de 2012	18 %	8 %	4 %
1 de septiembre de 2012	21 %	10 %	4 %

- En qué porcentaje se incrementó cada tipo de IVA el 1 de septiembre de 2012.
- En qué porcentaje se debería reducir cada tipo de IVA actual para devolverlo al nivel de agosto de 2012.
- Una familia que gasta un 45 % en bienes y servicios gravados con el tipo normal de IVA, un 30 % con el tipo reducido, un 15 % al tipo súper reducido y un 10 % en bienes exentos de IVA, se vio afectada por esta subida de impuestos. ¿En qué porcentaje le aumentó el IVA?

Solución:

El IVA general pasó del 18% *al* 21%. *Quiere decir que pasamos de pagar en impuestos* 18€ *por cada* 100€ *gastados, a* 21€ *por cada* 100€. *Esto supone un aumento de* 3€ *sobre los* 18€ *que pagábamos inicialmente y, aunque puede parecer que el incremento es del* 3% (*pagamos un* 3% *más sobre el valor de lo que compramos*), *en realidad, el IVA, sufrió un aumento porcentual del* $16,67\%$

$$\text{IVA general}: \; 18\% \to 21\% \;,\; \text{aumentó } \frac{3}{18} = 0,1\widehat{6} \approx 16,67\%$$

$$\text{IVA reducido}: \; 8\% \to 10\% \;,\; \text{aumentó } \frac{2}{8} = 0,25 = 25\%$$

$$\text{IVA súper reducido}: \; 4\% \to 4\% \;,\; \text{aumentó el } 0\%$$

Para volver a los niveles de agosto de 2012:

$$\text{IVA general}: \; 21\% \to 18\% \;,\; \text{debería disminuir } \frac{3}{21} \approx 0,1429 = 14,29\%$$

$$\text{IVA reducido}: \; 10\% \to \;\% \;,\; \text{debería disminuir } \frac{2}{10} = 0,2 = 20\%$$

La familia del supuesto, de cada 100€ *que gasta en bienes y servicios,* 45€ *están sujetos al IVA general,* 30€ *al IVA reducido y* 15€ *al súper reducido. Por tanto, sus impuestos por este concepto, el* 31 *de agosto de* 2012, *habrían sido*: $0,18 \cdot 45 + 0,08 \cdot 30 + 0,04 \cdot 15 = 11,10$€
El 1 *de septiembre de* 2012, *pasaron a ser*: $0,21 \cdot 45 + 0,1 \cdot 30 + 0,04 \cdot 15 = 13,05$€

$$\frac{13,05}{11,1} \approx 1,1757 \quad \Rightarrow \text{ el aumento, en porcentaje, de los impuestos en concepto de IVA fue del } 17,57\%.$$

Ejercicio 2.

Disponemos de ciertos ahorros y nos planteamos contratar una cuenta a plazo con pago de intereses trimestral.

- Durante cuánto tiempo debemos mantener 20.000 € en una cuenta, al 2% de interés anual y con abono de intereses trimestral, para que se conviertan en 22.770 €.
- A qué tipo de interés anual deberíamos depositar 20.000 € para obtener un beneficio de 4.000 €, en cuatro años, con abono de intereses trimestral.

Solución:

1.
20.000 € *han de convertirse en* 22.770 €, *a un* 2% *de interés anual y con periodos de capitalización trimestrales.*

Por tanto $22770 = 20000 \cdot \left(1+\frac{2}{400}\right)^n$, *siendo n el número de trimestres* $\Rightarrow \quad 22770 = 20000 \cdot (1,005)^n \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{22770}{20000} = (1,005)^n \quad \Rightarrow \quad \log(1,1385) = \log(1,005)^n \quad \Rightarrow \log(1,1385) = n \cdot \log(1,005) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad n = \frac{\log(1,1385)}{\log(1,005)} = 26 \quad \Rightarrow$ *son necesarios* 26 *trimestres, es decir, seis años y medio.*

2.
Ahora, 20.000 € *han de convertirse en* 24.000 €, *en cuatro años y con periodos de capitalización trimestrales. Busquemos el tipo de interés anual, necesario para lograrlo.*

$24000 = 20000 \cdot \left(1+\frac{i}{400}\right)^{16}$, *siendo i el interés anual* $\Rightarrow \quad \left(1+\frac{i}{400}\right)^{16} = \frac{24000}{20000} \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{i}{400}\right)^{16} = 1,2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{i}{400} = (1,2)^{1/16} \quad \Rightarrow \quad i = \left[(1,2)^{1/16} - 1\right] \cdot 400 \quad \Rightarrow \quad i \approx 4,584$$

Necesitamos un 4,6% de interés anual.

Ejercicio 3.

Queremos solicitar un préstamo de 40.000 € y nuestro banco nos ofrece un tipo de interés del 6% anual.

- Encuentra la cuota mensual adecuada para amortizarlo en 7 años.
- Si queremos pagar una cuota mensual de 400 €, ¿cuánto tiempo tardaremos en amortizar el préstamo?

Solución:

1.
Si el capital prestado hubiese que devolverlo en un único pago, al final de los 7 años y con periodos de capitalización mensuales, se habría convertido en $40000 \cdot \left(1+\frac{6}{1200}\right)^{84} = 60.814,79$ €

Si llamamos m a la cuota mensual válida para amortizar el préstamo, tenemos que la primera cuota estará produciendo (dejando de pagar) intereses durante 83 meses, la segunda 82 y así sucesivamente, con lo que las cuotas pagadas hasta el vencimiento acumulan el valor:

$$m+m\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)+m\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^2+\cdots\cdots+m\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{82}+m\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{83}=m\cdot\frac{\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{84}-1}{\left(1+\frac{6}{1200}\right)-1}=m\cdot 104,074$$

Ese valor acumulado, de algo más de 104 cuotas $(104,074\cdot m)$, *debe ser igual a la cantidad que tendría que recibir el banco.*
$104,074\cdot m=60814,79 \quad\Rightarrow\quad m=584,34$, *la cuota mensual será de 584,34 €.*

2.
Si ahora queremos que la cuota mensual para amortizar el préstamo sea de 400 €, tenemos que la primera cuota estará produciendo (dejando de pagar) intereses durante $(n-1)$ *meses, la segunda* $(n-2)$ *y así sucesivamente, con lo que las cuotas pagadas hasta el vencimiento acumulan el valor:*

$$400+400\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)+400\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^2+\cdots\cdots+400\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{n-2}+400\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{n-1}=400\cdot\frac{\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{n}-1}{\left(1+\frac{6}{1200}\right)-1}$$

Ese valor acumulado, debe ser igual a la cantidad que tendría que recibir el banco: $40000\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^n$

con lo que tenemos: $400\cdot\frac{\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{n}-1}{\frac{6}{1200}}=40000\cdot\left(1+\frac{6}{1200}\right)^n \quad\Rightarrow\quad 400\cdot\left[(1,005)^n-1\right]=\frac{6}{1200}\cdot 40000\cdot(1,005)^n \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad 400\cdot(1,005)^n-400=200\cdot(1,005)^n \quad\Rightarrow\quad 400\cdot(1,005)^n-200\cdot(1,005)^n=400 \quad\Rightarrow\quad 200\cdot(1,005)^n=400 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad (1,005)^n=2 \quad\Rightarrow\quad \log(1,005)^n=\log 2 \quad\Rightarrow\quad n\cdot\log(1,005)=\log 2 \quad\Rightarrow\quad n=\frac{\log 2}{\log(1,005)}\approx 139$

Con una cuota mensual de 400 €, tardaríamos 139 meses en amortizar el préstamo.

Ejercicio 4.

Juan se ha planteado seguir un plan de ahorro personal durante 5 años y para ello ha contratado una cuenta de ahorro remunerada, al 2,5 % de interés anual, con abono de intereses mensual. Al contratar la cuenta efectúa un ingreso de 5.000 € y acuerda con el banco que, al inicio de cada mes, se haga un traspaso automático de 150 € desde su cuenta corriente a la cuenta de ahorro, efectuando el primero de ellos en ese mismo instante. ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta al finalizar el periodo de 5 años?

Solución:

Los 5.000 € iniciales van a estar en la cuenta 5 años, a un 2,5% de interés anual y con periodos de capitalización mensuales con lo que al final de los 5 años se habrán convertido en:

$$5000\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)^{60}=5665,01€$$

Por otro lado, las aportaciones mensuales de $150\,€$ *van a estar en cuenta tiempos diferentes, desde la primera, que estará* 60 *meses, hasta la última, que estara* 1 *mes. Esas aportaciones, en* 5 *años, acumularán un valor:*

$$150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)^{60}+150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)^{59}+\cdots\cdots+150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)^{2}+150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)=\frac{150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)^{61}-150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)}{\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)-1}=$$

$$=150\cdot\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{2,5}{1200}\right)^{60}-1}{\frac{2,5}{1200}}=9596,03\,€\ \Rightarrow\ \textit{Al finalizar los 5 años, en cuenta tendrá}\quad 5665,01+9596,03=15.261,04\,€$$