

Ejercicio 1.

Calcula el valor de las expresiones:

$$a) \log_4 \left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[3]{4} \right) : \sqrt[6]{\frac{1}{32}} \right]$$

$$b) \log_{0,25} 8 + \log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} - \log(0,01)^{-1}$$

$$\begin{aligned} a) \log_4 \left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[3]{4} \right) : \sqrt[6]{\frac{1}{32}} \right] &= \log_4 \left[\left(2^{-1/2} \cdot 2^{4/10} \cdot 2^{2/30} \right) : 2^{-5/6} \right] = \log_4 \left[2^{-1/30} : 2^{-5/6} \right] = \\ &= \log_4 \left[2^{-\frac{1}{30} + \frac{5}{6}} \right] = \log_4 \left[2^{4/5} \right] = \frac{4}{5} \cdot \log_4 2 = \frac{4}{5} \cdot \log_4 4^{1/2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \log_{0,25} 8 + \log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} - \log(0,01)^{-1} &= \log_{\frac{1}{4}} 2^3 + \log_{25} 5^{-1/2} - \log 10^2 = 3 \log_{\frac{1}{4}} 2 - \frac{1}{2} \log_{25} 5 - 2 = \\ &= 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 25} - 2 = 3 \cdot \frac{1}{-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

Resuelve:

$$a) \frac{5-2x}{3x-9} \leq 1$$

$$b) 1-x = \sqrt{1-x\sqrt{4-7x^2}}$$

$$a) \frac{5-2x}{3x-9} \leq 1 \Rightarrow \frac{5-2x}{3x-9} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{5-2x-3x+9}{3x-9} \leq 0 \Rightarrow \frac{14-5x}{3x-9} \leq 0 \Rightarrow \frac{14-5x}{3(x-3)} \leq 0$$

$$\text{entonces } x \in \left(-\infty, \frac{14}{5} \right] \cup (3, +\infty)$$

	$\left(-\infty, \frac{14}{5} \right)$	$\frac{14}{5}$	$\left(\frac{14}{5}, 3 \right)$	3	$(3, \infty)$
$14-5x$	+	0	-	-	-
$x-3$	-	-	-	0	+
$\frac{14-5x}{3(x-3)}$	-	0	+	\neq	-

$$\begin{aligned}
 b) \quad 1-x &= \sqrt{1-x\sqrt{4-7x^2}} \Rightarrow (1-x)^2 = 1-x\sqrt{4-7x^2} \Rightarrow 1-2x+x^2 = 1-x\sqrt{4-7x^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (x^2-2x)^2 = (-x\sqrt{4-7x^2})^2 \Rightarrow x^4-4x^3+4x^2 = x^2(4-7x^2) \Rightarrow x^4-4x^3+4x^2 = 4x^2-7x^4 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 8x^4-4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^3(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ se comprueban las soluciones y ambas son válidas}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Calcula:

a) La siguiente suma infinita: $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{27} + \dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^4-9}}{3n\sqrt{4n^2-4}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{3}}{27}, \frac{1}{27}, \dots$ es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^4-9}}{3n\sqrt{4n^2-4}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9(n^4-1)}}{3n\sqrt{4(n^2-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{n^4-1}}{6 \cdot \sqrt{n^2(n^2-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n^4-1}{n^4-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{n^4-1}{n^4}}{\frac{n^4-n^2}{n^4}}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n^4}}{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-0}{1-0}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Prueba que la sucesión de todos los números naturales, que divididos por 7 dan de resto 5, es una progresión aritmética. Halla la expresión del término general y la suma de todos los términos de tres cifras de dicha progresión.

Los números naturales que al dividirlos por 7 dan de resto 5 serán múltiplos de 7 más 5 o múltiplos de 7 menos 2, es decir de la forma $7n+5$ o $7n-2$.

La sucesión $7n+5$ es 12, 19, 26, 33, 40,.... que deja fuera al 5, número natural de resto 5 al dividir por 7.

Entonces $a_n = 7n - 2 \Rightarrow 5, 12, 19, 26, 33, 40, \dots$ es la sucesión pedida, que es una progresión aritmética de diferencia 7.

Ahora tenemos que sumar todos los términos de tres cifras, el primero será $a_{15} = 7 \cdot 15 - 2 = 103$ y el último será $a_{143} = 999$.

El número de términos que sumamos es $143 - 15 + 1 = 129$ y entonces la suma vale:

$$S = \frac{(103 + 999) \cdot 129}{2} = 71079$$

Ejercicio 5.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) 4 \cdot \left(2^x + \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 33$$

$$b) \log(x-1) - \log\sqrt{5+x} - \log\sqrt{5-x} = 0$$

$$a) 4 \cdot \left(2^x + \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 33 \Rightarrow 4 \cdot \left(2^x + \frac{2}{2^x} \right) = 33 \Rightarrow (\text{llamando } 2^x = t) \Rightarrow 4 \cdot \left(t + \frac{2}{t} \right) = 33 \Rightarrow 4t + \frac{8}{t} = 33$$

$$\text{quitando denominadores queda } 4t^2 + 8 = 33t \Rightarrow 4t^2 - 33t + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{entonces si } t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{si } t = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2$$

$$b) \log(x-1) - \log\sqrt{5+x} - \log\sqrt{5-x} = 0 \Rightarrow \log(x-1) = \log\sqrt{5+x} + \log\sqrt{5-x} \Rightarrow$$

$$\log(x-1) = \log(\sqrt{5+x} \cdot \sqrt{5-x}) \Rightarrow \log(x-1) = \log(\sqrt{25-x^2}) \Rightarrow x-1 = \sqrt{25-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{25-x^2})^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \text{ valor no válido por no verificar la ecuación inicial.} \end{cases}$$

Ejercicio 6.

- En el polinomio $2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 3m$, ¿qué valor ha de tener m para que $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ sea un factor?
Después de calcular m factoriza el polinomio.

- Efectúa las operaciones y simplifica el resultado: $\frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-9} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9} + \frac{x^2+6}{x^2-9}$

Si $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es un factor de $p(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 3m \Rightarrow p(x)$ es divisible por $\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + 3m = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{5}{12} + 3m = 0 \Rightarrow 3m = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{9}$$

Como sabemos que $p(x)$ es divisible por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ lo aprovechamos para factorizar:

	2	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$		1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$	0

Entonces $p(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ buscamos las raíces de $2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 6x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \text{que no tiene raíces reales y por tanto es primo.}$$

Y la factorización es $2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9} + \frac{x^2+6}{x^2-9} &= \frac{(x-1)(x^2-1)(x^2+6x+9)}{(x+3)(x^2-9)(x^2-2x+1)} + \frac{x^2+6}{x^2-9} = \\ &= \frac{(x-1)(x-1)(x+1)(x+3)^2}{(x+3)(x-3)(x+3)(x-1)^2} + \frac{x^2+6}{x^2-9} = \frac{(x+1)}{(x-3)} + \frac{x^2+6}{x^2-9} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x^2+6)}{(x^2-9)} = \\ &= \frac{x^2+4x+3+x^2+6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x^2+4x+9}{x^2-9} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.

Tres números a , b y c , distintos de cero, están en progresión aritmética. Si se aumenta a en 1 unidad o c en dos unidades, resultan progresiones geométricas. Encontrar esos números.

Si a, b, c es una progresión aritmética se cumple $c - b = b - a$

Si $a+1, b, c$ es una progresión geométrica se cumple $\frac{c}{b} = \frac{b}{a+1}$

Si $a, b, c+2$ es una progresión geométrica se cumple $\frac{c+2}{b} = \frac{b}{a}$

$$\begin{cases} c - b = b - a \\ \frac{c}{b} = \frac{b}{a+1} \\ \frac{c+2}{b} = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2b \\ (a+1)c = b^2 \\ a(c+2) = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ (a+1)c = b^2 \\ a(c+2) = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4} = b^2 \\ (a+1)c = b^2 \\ a(c+2) = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)c = \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4} \\ a(c+2) = (a+1)c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a+1)c = a^2 + c^2 + 2ac \\ ac + 2a = ac + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a+1)2a = a^2 + (2a)^2 + 2a2a \\ c = 2a \end{cases}$$

$$8a^2 + 8a = a^2 + 4a^2 + 4a^2 \Rightarrow a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a(a - 8) = 0 \Rightarrow \text{como } a \neq 0 \Rightarrow a = 8$$

$$c = 16, b = \frac{8+16}{2} = 12; \text{ entonces los números en progresión aritmética son } 8, 12, 16$$