

Ejercicio 1.

Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real los siguientes conjuntos de números:

a) $|x+2| < 4$

b) $|2x-1| \geq 5$

Solución:

a) $|x+2| < 4 \Rightarrow |x-(-2)| < 4 \Rightarrow$ *la distancia entre "x" y (-2) tiene que ser menor que 4*
 $d(x, -2) < 4 \Rightarrow$ *desde (-2) nos movemos 4 unidades a la derecha y a la izquierda:*
 $-2-4 < x < -2+4 \Rightarrow -6 < x < 2 \Rightarrow x \in (-6, 2)$

También podemos verlo así: $|x+2| < 4 \Rightarrow \begin{cases} x+2 < 4 \\ x+2 > -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x \in (-6, 2)$

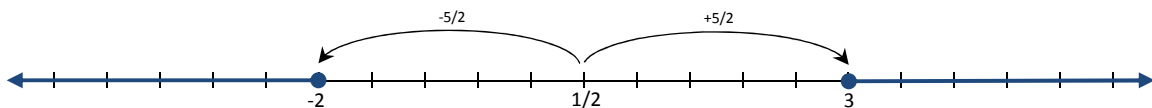
Gráficamente:



b) $|2x-1| \geq 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 5 \\ 2x-1 \leq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 6 \\ 2x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

También: $|2x-1| \geq 5 \Rightarrow \frac{|2x-1|}{2} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{5}{2} \Rightarrow d\left(x, \frac{1}{2}\right) \geq \frac{5}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$ y $x \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$
 $\Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

Gráficamente:

**Ejercicio 2.**

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(4x^3 + 4x^2 - 11x - 6) \cdot (x^3 + 5x - 6) = 0$

b) $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$

Solución:

a) $(4x^3 + 4x^2 - 11x - 6) \cdot (x^3 + 5x - 6) = 0$ *como la única opción de que el producto de dos números sea cero es que lo sea alguno de ellos, tenemos:*

$$(4x^3 + 4x^2 - 11x - 6) \cdot (x^3 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (4x^3 + 4x^2 - 11x - 6) = 0 \\ (x^3 + 5x - 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Para resolver la ecuación $4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = 0$, descomponemos el polinomio usando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 4 & 4 & -11 & -6 \\ & & -8 & 8 & 6 \\ \hline & 4 & -4 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow 4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = (x+2) \cdot (4x^2 - 4x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = 0 \Rightarrow x+2=0 \quad \text{o} \quad 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Con la otra ecuación hacemos lo mismo, $x^3 + 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 5 & -6 \\ & & 1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + 5x - 6 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 6) \Rightarrow (x-1) \cdot (x^2 + x + 6) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \text{ no tiene solución real}$$

Soluciones de la ecuación: $\left\{ x = -2, x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}, x = 1 \right\}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} &= 1 \Rightarrow \sqrt{7+2x} = 1 + \sqrt{3+x} \Rightarrow (\sqrt{7+2x})^2 = (1 + \sqrt{3+x})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7+2x = 1+3+x+2 \cdot \sqrt{3+x} \Rightarrow x+3 = 2 \cdot \sqrt{3+x} \Rightarrow (x+3)^2 = (2 \cdot \sqrt{3+x})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 4(3+x) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos las soluciones y vemos que ambas son válidas.

$$\sqrt{7+2 \cdot 1} - \sqrt{3+1} = 3-2=1 \quad ; \quad \sqrt{7+2 \cdot (-3)} - \sqrt{3+(-3)} = 1$$

Ejercicio 3.

Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin utilizar la calculadora:

$$\text{a) } \log_4 \left(3\sqrt[3]{128} + 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{16} \right)$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}} \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_4 \left(3\sqrt[3]{128} + 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{16} \right) &= \log_4 \left(3\sqrt[3]{2^7} + 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - 5\sqrt[3]{2^4} \right) = \log_4 \left(12\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} \right) = \\ &= \log_4 \left(16\sqrt[3]{2} \right) = \log_4 16 + \log_4 \sqrt[3]{2} = \log_4 4^2 + \log_4 2^{\frac{1}{3}} = \log_4 4^2 + \log_4 \left(4^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \log_4 4^2 + \log_4 4^{\frac{1}{6}} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}} \right) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{3}}} \right) = \log_{\frac{1}{3}} \left(3 \right)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{-\frac{1}{6}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Ejercicio 4.

Recibimos un préstamo de 21 000 € al 8% anual que amortizamos pagando, cada trimestre, una cuota de 2866,71 €. ¿Cuánto tiempo tardaremos en saldar la deuda?

Solución:

Los 21.000€ que nos han prestado, los amortizaremos en "n" trimestres a un 8% de interés anual.

Cuando pasen los "n" trimestres tendremos que devolver $21000 \cdot \left(1 + \frac{8}{400}\right)^n = 21000 \cdot (1,02)^n$

Por otro lado, las cuotas trimestrales de 2866,71€ acumularán un valor:

$$2866,71 \cdot (1,02)^{n-1} + 2866,71 \cdot (1,02)^{n-2} + \dots + 12866,71 \cdot (1,02) + 2866,71 = 2866,71 \cdot \left[\frac{(1,02)^n - 1}{(1,02) - 1} \right]$$

$$\text{Con lo que tenemos que: } 21000 \cdot (1,02)^n = 2866,71 \cdot \left[\frac{(1,02)^n - 1}{0,02} \right] \Rightarrow 21000 \cdot (1,02)^n = \frac{2866,71}{0,02} \cdot [(1,02)^n - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21000 \cdot (1,02)^n = 143335,5 \cdot [(1,02)^n - 1] \Rightarrow 21000 \cdot (1,02)^n = 143335,5 \cdot (1,02)^n - 143335,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 143335,5 = 143335,5 \cdot (1,02)^n - 21000 \cdot (1,02)^n \Rightarrow 143335,5 = 122335,5 \cdot (1,02)^n \Rightarrow (1,02)^n = \frac{143335,5}{122335,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,02)^n = 1,1716591 \Rightarrow \log(1,02)^n = \log(1,1716591) \Rightarrow n = \frac{\log(1,1716591)}{\log(1,02)} = 7,999988 \approx 8$$

Son necesarios 8 trimestres para amortizar el préstamo, es decir, 2 años.

Ejercicio 5.

¿Qué valor ha de tener m para que el polinomio $p(x) = 2x^4 + x^3 + mx^2 - x + 6$ sea divisible por $(x+1)$?

Para ese valor de m, calcula el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

Solución:

Si $p(x) = 2x^4 + x^3 + mx^2 - x + 6$ es divisible por $(x+1)$ quiere decir que $p(-1) = 0$.

$$p(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 - (-1) + 6 = 2 - 1 + m + 1 + 6 \Rightarrow m + 8 = 0 \Rightarrow m = -8$$

Ahora factorizamos los polinomios $p(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ y $q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -8 & -1 & 6 & \\ -1 & & -2 & 1 & 7 & -6 \\ \hline 2 & -1 & -7 & 6 & 0 & \\ 1 & & 2 & 1 & -6 & \\ \hline 2 & 1 & -6 & 0 & & \\ -2 & & -4 & 6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -7 & 8 & -3 & \\ 1 & & 2 & -5 & 3 \\ \hline 2 & -5 & 3 & 0 & \\ 1 & & 2 & -3 & \\ \hline 2 & -3 & 0 & & \end{array}$$

$$q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = (x-1)^2 \cdot (2x-3)$$

$$p(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (2x-3) \Rightarrow \text{M.C.D.}(p(x), q(x)) = (x-1) \cdot (2x-3)$$

Ejercicio 6.

Opera y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4x+3} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right) : \frac{3x-18}{x^2-1}$$

Solución:

Factorizamos los denominadores: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$; tenemos como común denominador: $(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-2}{x^2-4x+3} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right) : \frac{3x-18}{x^2-1} &= \left(\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) : \frac{3x-18}{x^2-1} = \\ &= \left(\frac{(x-2)^2 - (x-1)^2 + (x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) : \frac{3x-18}{x^2-1} = \left(\frac{x^2-4x+4 - (x^2-2x+1) + x^2-6x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) : \frac{3x-18}{x^2-1} = \left(\frac{x^2-8x+12}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) : \frac{3x-18}{x^2-1} = \\ &= \frac{(x^2-8x+12)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)(3x-18)} = \frac{\cancel{(x-2)} \cancel{(x-6)} (x+1) \cancel{(x-1)}}{3 \cancel{(x-1)} \cancel{(x-2)} (x-3) \cancel{(x-6)}} = \frac{x+1}{3(x-3)} = \frac{x+1}{3x-9} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.

Lidia duda entre pedir un préstamo hipotecario al Banco Bank, a un interés del 4% y amortizable en 15 años, o a la Caja Cash, a un interés del 5% y amortizable en 10 años. ¿Dónde pagará menor cuota mensual? ¿Dónde tendrá que devolver menos dinero? Usa para las comparaciones la cantidad de 100.000 euros.

Solución:

Si el capital prestado hubiese que devolverlo en un único pago, al final de los años estipulados y con periodos de capitalización mensuales, se habría convertido, en el caso del Banco Bank, $BB = 100000 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{180} = 182.030,16 \text{ €}$

Para el supuesto de la Caja Cash, tendríamos $CC = 100000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{120} = 164.700,95 \text{ €}$

Llamamos c_1 a la cuota mensual válida para amortizar el préstamo del Banco Bank y c_2 a la cuota de la Caja Cash. Tenemos que, para el caso de c_1 , la primera cuota estará produciendo intereses durante 179 meses, la segunda 178 y así sucesivamente, con lo que las cuotas pagadas hasta el vencimiento acumulan el valor:

$$c_1 + c_1 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right) + c_1 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^2 + \dots + c_1 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{178} + c_1 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{179} = c_1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{180} - 1}{\left(1 + \frac{4}{1200}\right) - 1} \approx c_1 \cdot 246,09$$

Ese valor acumulado, de algo más de 246 cuotas ($246,09 \cdot c_1$), debe ser igual a la cantidad BB que tendría que recibir el banco. $246,09 \cdot c_1 = 182030,16 \Rightarrow c_1 = 739,69$, la cuota mensual para el caso del Banco Bank será de 739,69€.

En el caso de c_2 , la primera cuota estará produciendo intereses durante 119 meses, la segunda 118 y así sucesivamente, con lo que las cuotas pagadas hasta el vencimiento acumulan el valor:

$$c_2 + c_2 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right) + c_2 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^2 + \dots + c_2 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{118} + c_2 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{119} = c_2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{120} - 1}{\left(1 + \frac{5}{1200}\right) - 1} \approx c_2 \cdot 155,28$$

Ese valor acumulado, de algo más de 155 cuotas ($155,28 \cdot c_2$), debe ser igual a la cantidad CC que tendría que recibir la Caja. $155,28 \cdot c_2 = 164700,95 \Rightarrow c_2 = 1060,67$, la cuota mensual para el caso de la Caja Cash será de 1.060,67 €.

Entonces tenemos que $c_1 = 739,69$ € y $c_2 = 1.060,67$ €, con lo que el préstamo del Banco Bank tiene una cuota mensual inferior. Sin embargo, en las cantidades que devolveremos ocurre que para el Banco Bank pagaremos 180 cuotas $\Rightarrow 180 \cdot 739,69 = 133.144,20$ € y para la Caja Cash serán 120 cuotas $\Rightarrow 120 \cdot 1060,67 = 127.280,40$ €

En el Banco Bank pagaremos, al final, casi 6.000 € más que en la Caja Cash, eso sí, en cuotas bastante más cómodas.

Ejercicio 8.

Reduce las expresiones:

$$a) \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} \right) \cdot \sqrt[4]{2}$$

$$b) \frac{(\sqrt[3]{a^2})^4 \cdot (a^2 \cdot \sqrt{a})^3}{\sqrt[6]{a^5}}$$

Solución:

$$a) \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} \right) \cdot \sqrt[4]{2} = \left(2^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \cdot 4^{1/12} \right) \cdot 2^{1/4} = 2^{1/2} \cdot 2^{-1/4} \cdot 2^{2/12} \cdot 2^{1/4} = 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)} = 2^{4/6} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$$

$$b) \frac{(\sqrt[3]{a^2})^4 \cdot (a^2 \cdot \sqrt{a})^3}{\sqrt[6]{a^5}} = \frac{(a^{2/3})^4 \cdot (a^2 \cdot a^{1/2})^3}{a^{5/6}} = \frac{a^{8/3} \cdot a^6 \cdot a^{3/2}}{a^{5/6}} = a^{\left(\frac{8}{3} + 6 + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right)} = a^{56/6} = a^{28/3} = a^9 \cdot \sqrt[3]{a}$$