Ejercicio 1.

Fahrenheit es una escala de temperatura termodinámica, donde el punto de congelación del agua es a 32 grados Fahrenheit (°F) y el punto de ebullición a 212 ° F (a una presión atmosférica normal).
La siguiente tabla establece la correspondencia entre grados Fahrenheit y grados Celsius (Centígrados):

º F	32	212	100	
º C	0	100		25

Completa la tabla mediante interpolación lineal.

Solución:

La función que transforma grados centígrados en grados Fahrenheit, o viceversa, es una función lineal $y = mx + b$

Podemos asignar la variable independiente "x" a la escala Celsius y la dependiente "y" a la escala Fahrenhei, o al revés. De este modo, la función lineal pasará por los puntos $(0\ ,\ 32)$ *y* $(100\ ,\ 212)$ *con lo que tenemos:*

$$\begin{cases} 32 = m \cdot 0 + b \\ 212 = m \cdot 100 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 = b \\ 212 = 100m + b \end{cases} \Rightarrow 212 = 100m + 32 \Rightarrow 180 = 100m \Rightarrow m = \frac{9}{5}$$

Por tanto la función lineal que transforma la escala Celsius en Fahrenheit es $y = \frac{9}{5}x + 32$.

$$\text{Ahora podemos completar la tabla:} \begin{cases} si\ \ x = 25 \Rightarrow y = \frac{9}{5} \cdot 25 + 32 \Rightarrow y = 77 \\ si\ \ y = 100 \Rightarrow 100 = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow x = \frac{(100 - 32) \cdot 5}{9} \Rightarrow x \simeq 37{,}8 \end{cases}$$

º F	32	212	100	77
º C	0	100	37,8	25

Ejercicio 2.

Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} |2x + 2| & si \quad x < 0 \\ -x^2 + x + 2 & si \quad 0 \le x < 3 \\ \log_2(x - 1) - 5 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Solución:

$f(x)$ *es una función definida por tres ramas, o trozos.*

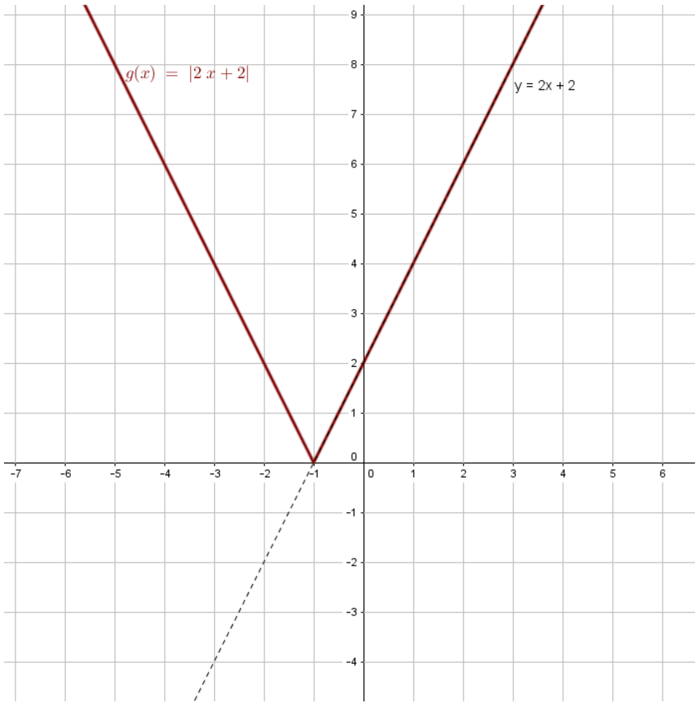
La primera rama es $y = |2x + 2|$ *que está definida en el intervalo* $(-\infty\ ,\ 0)$. *Podemos representarla a partir de la función* $y = 2x + 2$, *teniendo en cuenta que el valor absoluto transformará las imágenes negativas en sus opuestas (simétricas respecto del eje* OX*)*

Para representar $y=2x+2$ *nos basta con dar dos o tres valores:*

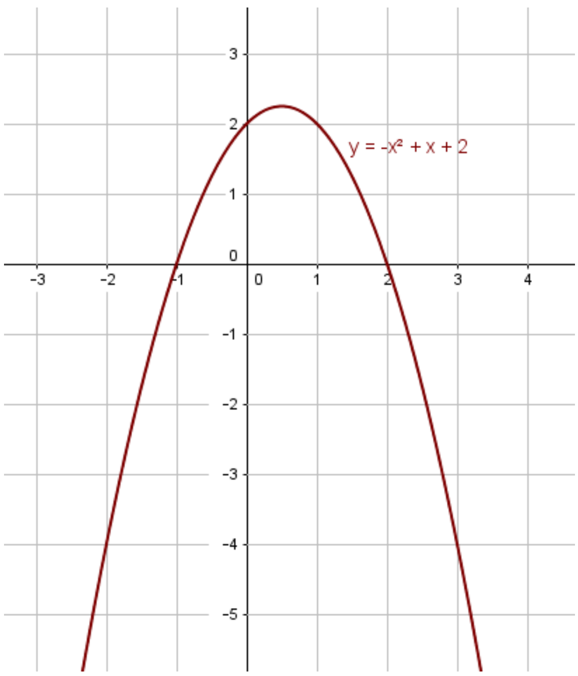
x	-3	-2	-1	0
y	-4	-2	0	2

La tabla para $y=\left|2x+2\right|$ *sería:*

x	-3	-2	-1	0
y	4	2	0	2



La rama $y=-x^2+x+2$ *está definida en el intervalo* $[0\,,\,3)$. *Es una parábola con* $a<0$ *por lo que su vértice será un máximo. Para representarla calcularemos las coordenadas del vértice y los cortes con los ejes.*



Si la parábola es $y=-x^2+x+2 \quad \left(y=ax^2+bx+c\right)$

Vértice $(x\,,\,y)$ $\begin{cases} x=-\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)+2 \Rightarrow y=\dfrac{9}{4} \end{cases}$

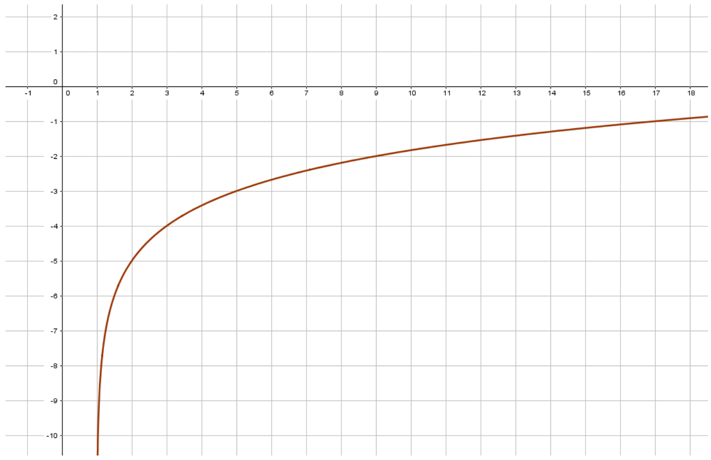
Corte eje OY: $x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0\,,\,2)$

Cortes eje OX: $y=0 \Rightarrow -x^2+x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

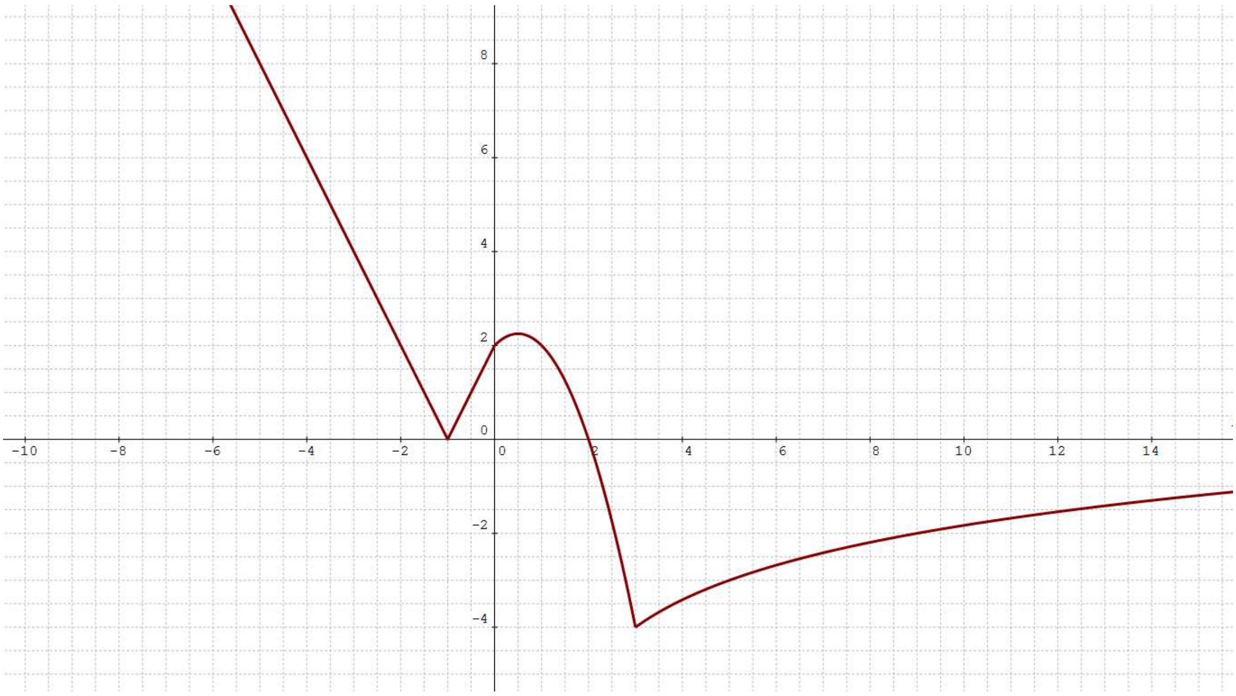
Nos interesa ver que pasa por el punto $(3\,,-4)$

La rama $y=\log_2(x-1)-5$ *está definida en el intervalo* $[3\,,+\infty)$. *Es una función logarítmica con base mayor que* 1, *por tanto creciente y dominio* $(1\,,+\infty)$, *con asíntota vertical* $x=1$. *Para representarla daremos unos valores:*

$si\ \ x=2 \ \Rightarrow \ y=\log_2(2-1)-5=\log_2 1-5=-5$
$si\ \ x=3 \ \Rightarrow \ y=\log_2(3-1)-5=\log_2 2-5=-4$
$si\ \ x=5 \ \Rightarrow \ y=\log_2(5-1)-5=\log_2 4-5=-3$
$si\ \ x=9 \ \Rightarrow \ y=\log_2(9-1)-5=\log_2 8-5=-2$
$si\ \ x=17 \Rightarrow y=\log_2(17-1)-5=\log_2 16-5=-1$



Entonces, restringiendo cada rama al dominio que tiene asignado, obtenemos la gráfica de la función $f(x)$.



Ejercicio 3.

Dadas las funciones $f(x)=\ln(x+1)$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ y $h(x)=\sqrt{9-x^2}$, se pide:

- Encuentra el dominio de la función $(g\cdot h)(x)$.
- Encuentra el dominio de la función $(f\circ g)(x)$.

Solución:

$$(g\cdot h)(x)=g(x)\cdot h(x)=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{9-x^2} \quad \Rightarrow \quad (g\cdot h)(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \quad ; \quad Dom(g\cdot h):\begin{cases}9-x^2\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$$

$$9-x^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad (3+x)(3-x)\geq 0$$

	$(-\infty\,,-3)$	-3	$(-3\,,\,3)$	3	$(3\,,+\infty)$
$(3+x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(3-x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(3+x)\cdot(3-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$9-x^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\in[-3\,,3]$, *como además* $x\neq 0 \quad\Rightarrow\quad Dom(g\cdot h)=[-3\,,0)\cup(0\,,3]$

$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad\Rightarrow\quad (f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$; $Dom(f\circ g):\left\{\dfrac{1}{x}+1>0\right\}$

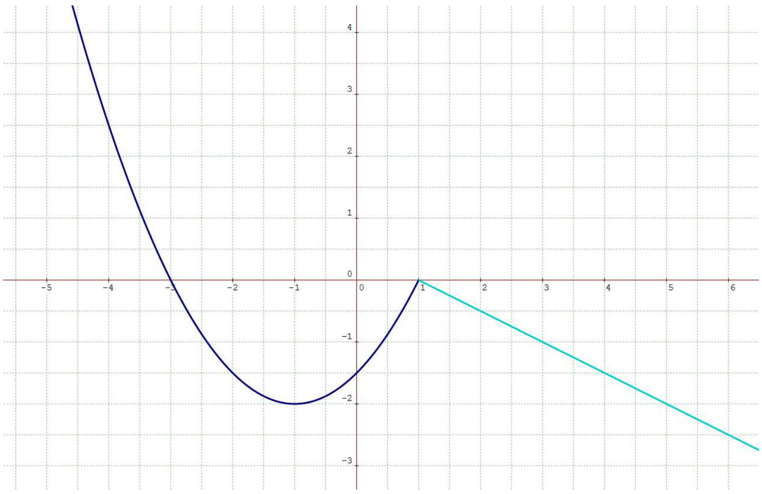
$\dfrac{1}{x}+1>0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1+x}{x}>0$

	$(-\infty\,,-1)$	-1	$(-1\,,0)$	0	$(0\,,+\infty)$
$(1+x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{1+x}{x}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$\dfrac{1+x}{x}>0 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty\,,-1)\cup(0\,,+\infty) \quad\Rightarrow\quad Dom(f\circ g)=(-\infty\,,-1)\cup(0\,,+\infty)$

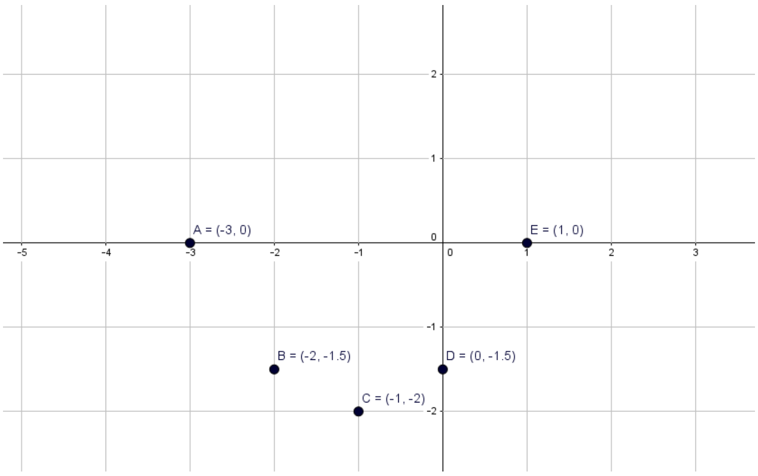
Ejercicio 4.

Encuentra la expresión analítica de la función cuya gráfica es la siguiente:



Solución:

Es una función que está definida por dos ramas, una parábola y una recta. Para encontrar la ecuación de la parábola, necesitamos tres puntos por los que pase. Fijándonos en la gráfica de la función, podemos determinar varios puntos por los que pasa.



La rama parabólica tendrá ecuación $y = ax^2 + bx + c$; *para encontrar los valores de* a, b *y* c *necesitamos tres ecuaciones que saldrán de sustituir tres de los puntos, por los que pasa la función, en la ecuación de la parábola.*

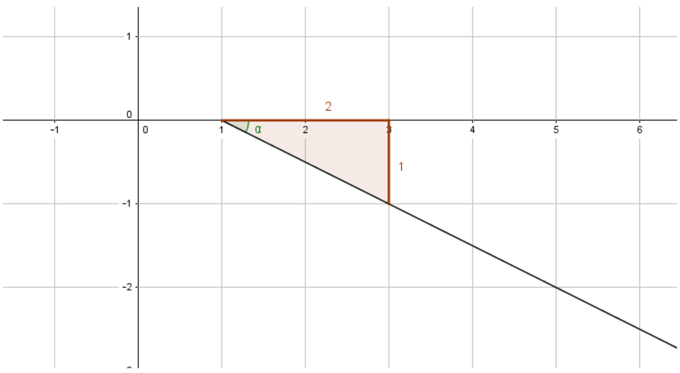
Por comodidad a la hora de resolver el sistema, tomaremos los puntos $C(-1,-2)$, $D\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ *y* $E(1,0)$

$$\begin{cases} a-b+c=-2 \\ c=-\frac{3}{2} \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b-\frac{3}{2}=-2 \\ a+b-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=1$$

Entonces la ecuación de la parábola será $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

Para encontrar la ecuación de la recta podemos proceder del mismo modo, sustituyendo dos puntos por los que pase en la ecuación $y = mx + b$ *y resolviendo el sistema resultante.*
También podemos buscar la pendiente en la gráfica y, con un punto, aplicar la fórmula de la recta en punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$



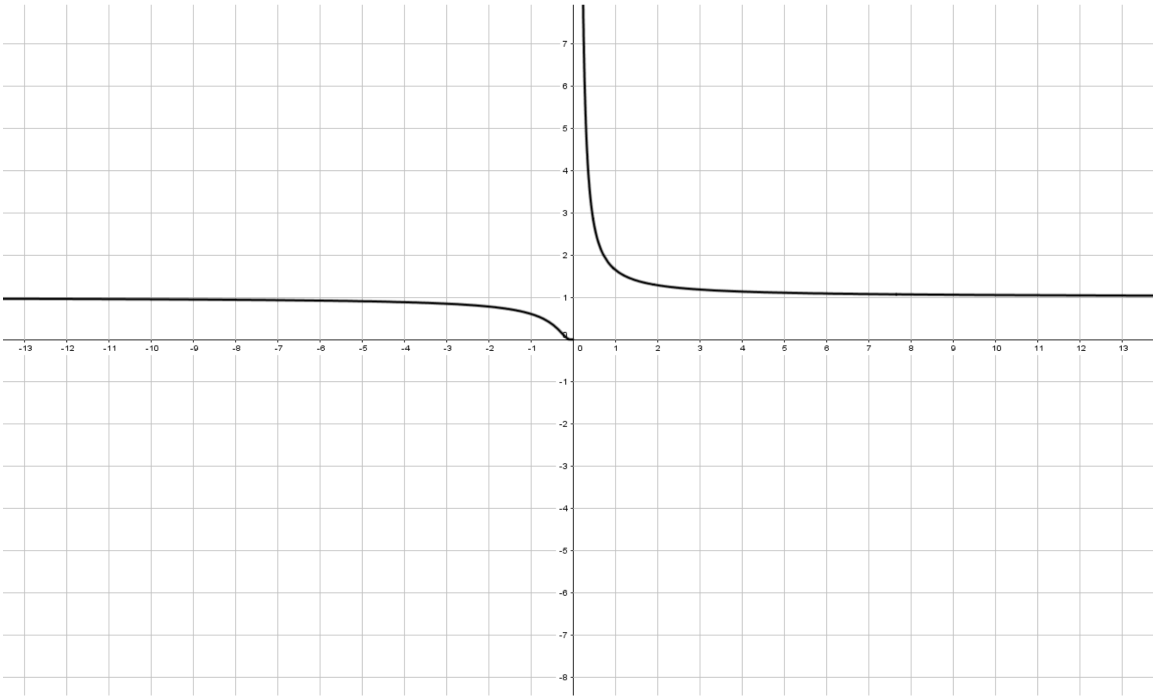
La pendiente m es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal, $m = tg\,\alpha$
Como la recta es decreciente, esa pendiente será negativa, $m=-\frac{1}{2}$ *y un punto por el que pasa es* $(1,0)$ $\Rightarrow$
$y-0=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\Rightarrow$ *la ecuación es* $y=\frac{-x+1}{2}$

La función pedida será: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2} & si\ \ x\le 1 \\ \frac{-x+1}{2} & si\ \ x>1 \end{cases}$

Ejercicio 5.

Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}$, cuya gráfica aparece debajo, se pide:

- Calcula la función inversa de $f(x)$.
- Comprueba, componiendo ambas funciones, que la función obtenida es $f^{-1}(x)$.
- Apoyándote en la gráfica de $f(x)$, esboza la gráfica de $f^{-1}(x)$.



Solución:

$f(x)=e^{\frac{1}{2x}}$, *buscamos su inversa*, $y=e^{\frac{1}{2x}} \xrightarrow{\text{hacemos cambio de variables}} x=e^{\frac{1}{2y}} \xrightarrow{\text{despejamos } y} \ln x=\ln e^{\frac{1}{2y}} \Rightarrow \ln x=\frac{1}{2y} \Rightarrow y=\frac{1}{2\ln x}$

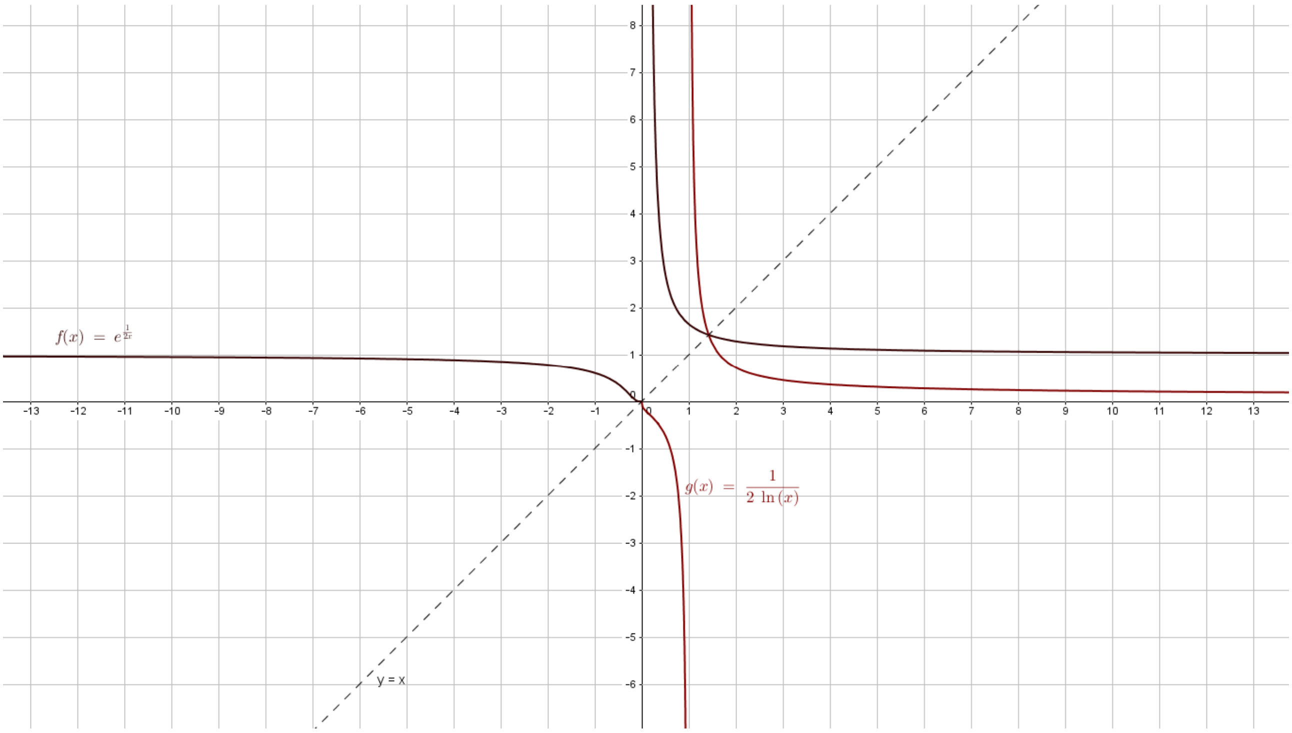
$f^{-1}(x)=\frac{1}{2\ln x}$

Comprobemos que es la inversa, para ello se debe cumplir: $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=id(x)$

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(\frac{1}{2\ln x}\right)=e^{\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\ln x}}}=e^{\ln x}=x \qquad \left(e^{\ln x}=x \iff \ln e^{\ln x}=\ln x\right)$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(e^{\frac{1}{2x}}\right)=\frac{1}{2\ln\left(e^{\frac{1}{2x}}\right)}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2x}}=x$$

Esbocemos ahora la gráfica de $f^{-1}(x)$, *teniendo en cuenta que debe ser simétrica de* $f(x)$ *con respecto a la recta* $y=x$.



$f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$
$g(x) = \frac{1}{2\ \ln(x)}$
y = x