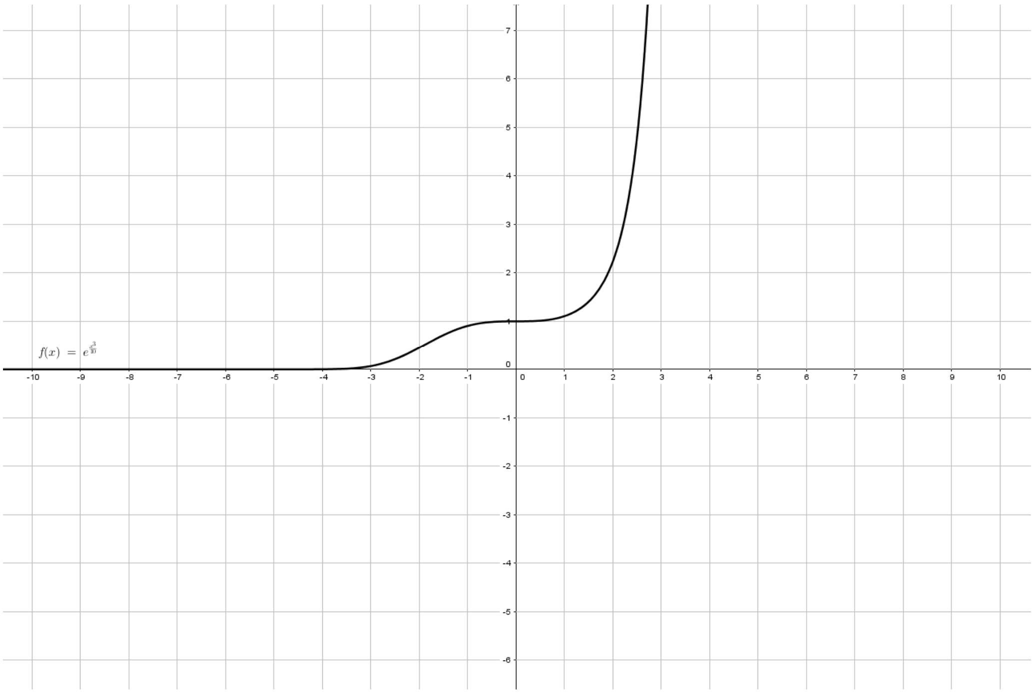
Ejercicio 1. 2 puntos

Dadas las funciones $f(x) = e^{\frac{x^3}{10}}$, $g(x) = \dfrac{1}{3-x}$ y $h(x) = \log_2(x+1)$, se pide:

- Encuentra el dominio de la función $(g \circ h)(x)$.
- Encuentra la función $f^{-1}(x)$ y esboza su gráfica, apoyándote en la gráfica de $f(x)$ que aparece debajo.



Solución:

La función $(g \circ h)(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad (g \circ h)(x) = \dfrac{1}{3-\log_2(x+1)}$

$Dom(g \circ h)(x)$ *estará formado por los* $x \in \mathbb{R}$ *tales que* $g(h(x))$ *es un número real.*

$$\begin{cases} \text{Para que } \log_2(x+1) \text{ sea un número real}, \ x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1 \\ \text{Para que } \dfrac{1}{3-\log_2(x+1)} \text{ sea un número real, además de } x>-1, \text{ se debe cumplir } 3-\log_2(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

$3-\log_2(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \log_2(x+1)=3 \quad \Rightarrow \quad x+1=2^3 \quad \Rightarrow \quad x=7$

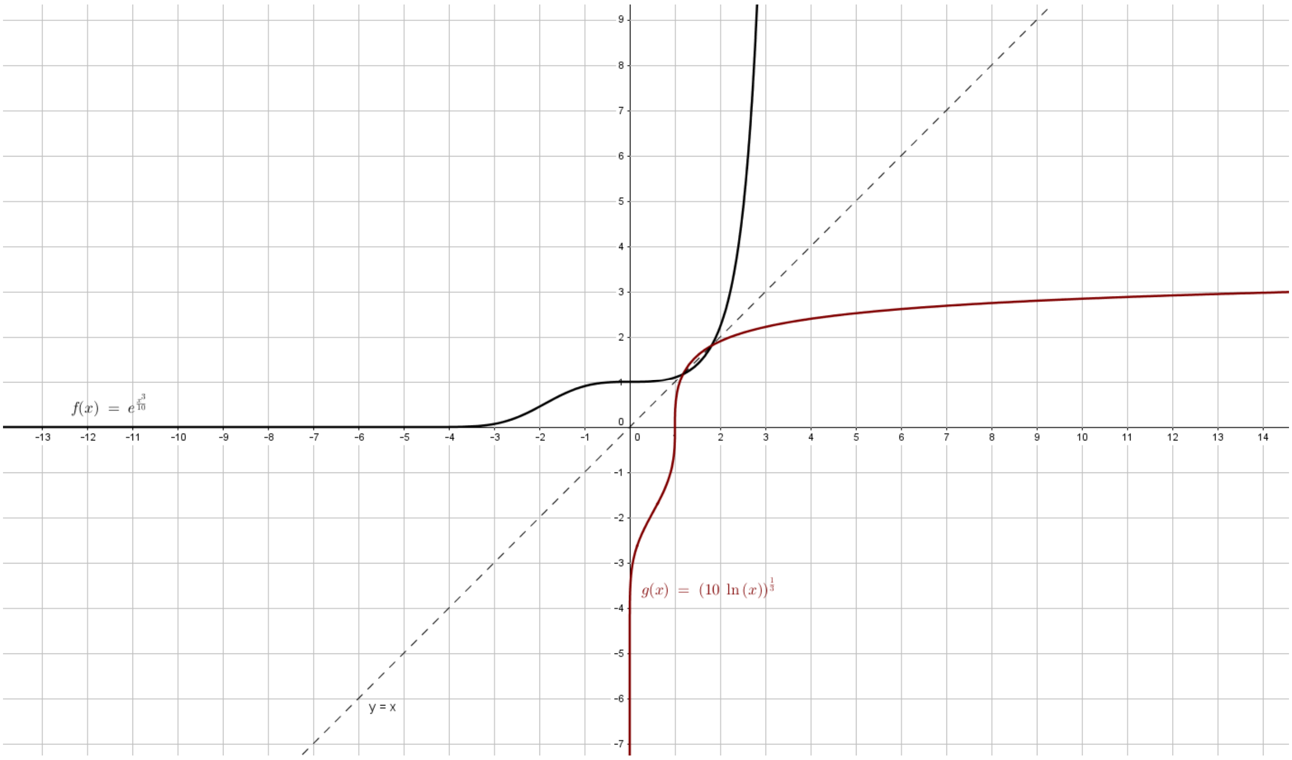
Entonces $Dom(g \circ h)(x) = (-1\,,\,7) \cup (7\,,\,+\infty)$

$f(x) = e^{\frac{x^3}{10}}$, *como es una función estrictamente creciente, tiene inversa. Busquemos* $f^{-1}(x)$.

$y=e^{\frac{x^3}{10}} \quad \Rightarrow \quad \ln y=\ln e^{\frac{x^3}{10}} \quad \Rightarrow \quad \ln y=\dfrac{x^3}{10} \quad \Rightarrow \quad x^3=10\cdot\ln y \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{10\cdot\ln y}$

Entonces, la función inversa de $y=e^{\frac{x^3}{10}}$ *será* $y=\sqrt[3]{10\cdot\ln x}$, *es decir* $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{10\cdot\ln x}$

Esbocemos su gráfica a partir de la de $f(x)$, *deben ser simétricas con respecto de la recta* $y=x$.



Ejercicio 2. 2 puntos

Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2-3x+2} & si \quad x<1 \\ \\ \dfrac{4x}{ax-1} & si \quad x\geq 1 \end{cases} \qquad (con \;\; a\in\mathbb{Z})$$

Estudia la continuidad de $f(x)$ según los valores del parámetro a.

Solución:

$f(x)$ *es una función definida por dos ramas, que son fracciones algebraicas. Las posibles discontinuidades estarán en los puntos donde se anulen los denominadores y en el punto de enlace de los dos trozos.*

La primera rama es $y=\dfrac{1-x^2}{x^2-3x+2}$ *que está definida en el intervalo* $(-\infty\,,1)$. $\quad x^2-3x+2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

Ninguno de esos puntos pertenecen al intervalo $(-\infty\,,1)$, *por tanto, esa rama no presenta discontinuidades.*

La segunda rama es $y=\dfrac{4x}{ax-1}\;(a\in\mathbb{Z})$ *que está definida en el intervalo* $[1\,,+\infty)$. $ax-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{a}\;(a\neq 0)$

Como $a\in\mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{1}{a}\leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a}\notin(1\,,+\infty)$, *por tanto, esa rama tampoco presenta discontinuidades.*

Tenemos que el problema queda reducido a estudiar la continuidad de $f(x)$ *en el punto* $x=1$.

Para que $f(x)$ *sea continua en* $x=1$, *se debe cumplir* $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

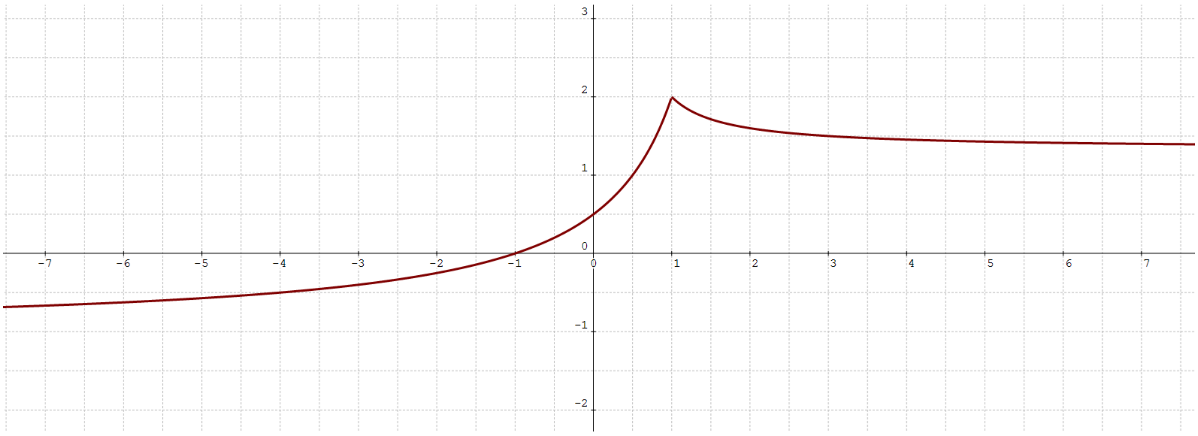
$$f(1)=\frac{4}{a-1}\;;\;\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(1+x)}{(x-2)}=2\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x}{ax-1}=\dfrac{4}{a-1}\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *existe cuando* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \dfrac{4}{a-1}=2 \Rightarrow a=3$. *En este caso* $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *y* $f(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}$.

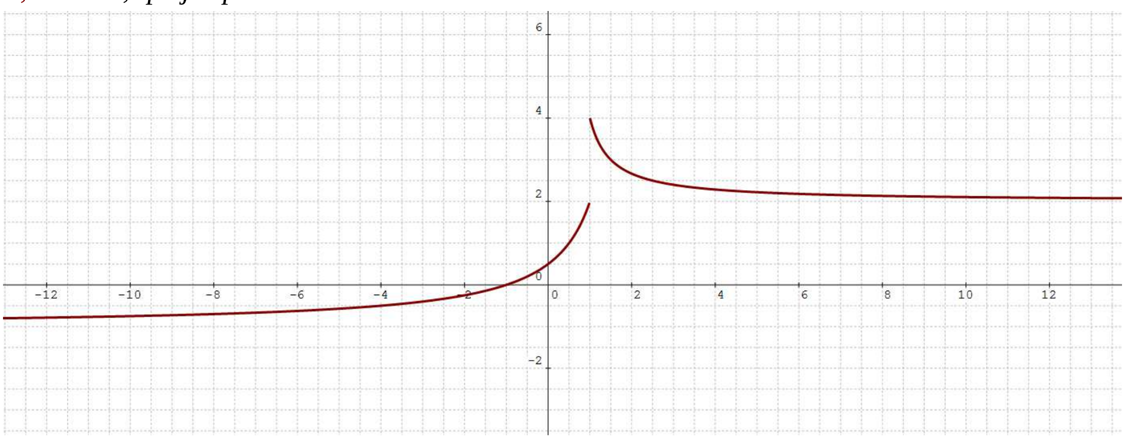
Si $a=1 \Rightarrow f(1)\notin\mathbb{R}$ *y* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x}{x-1}\to+\infty \Rightarrow f(x)$ *presenta una discontinuidad de tipo infinito en* $x=1$.

Si $a\neq 1$ *y* $a\neq 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x}{ax-1}=k\in\mathbb{R}\,,\;k\neq 2 \Rightarrow f(x)$ *presenta una discontinuidad de tipo finito en* $x=1$.

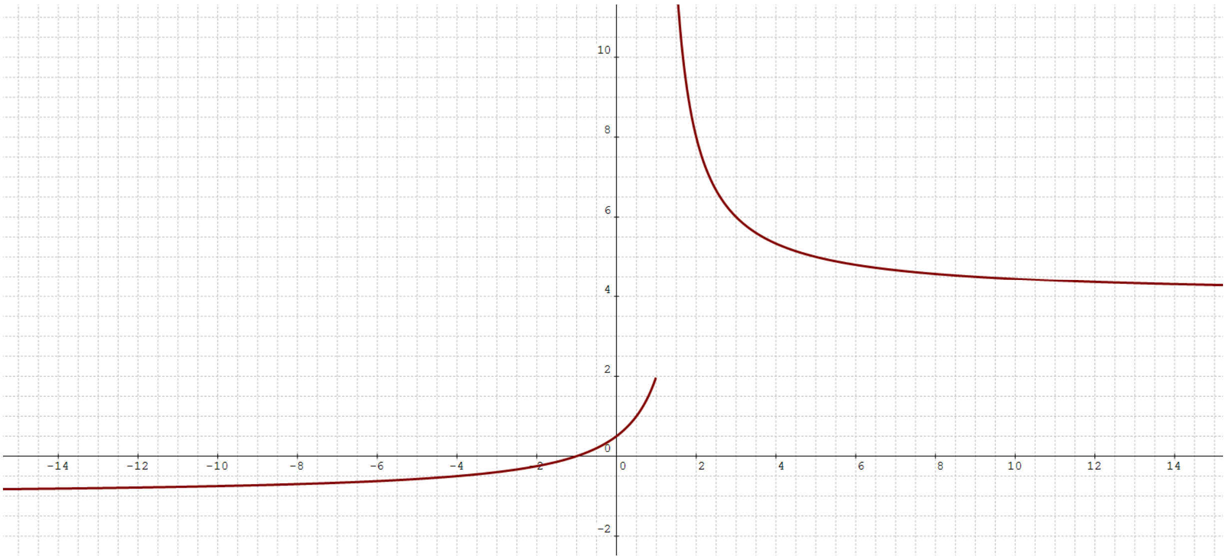
Si $a=3$



Si $a\neq 3\,,\;a\neq 1\;\;;\;$ *p.ejemplo* $a=2$

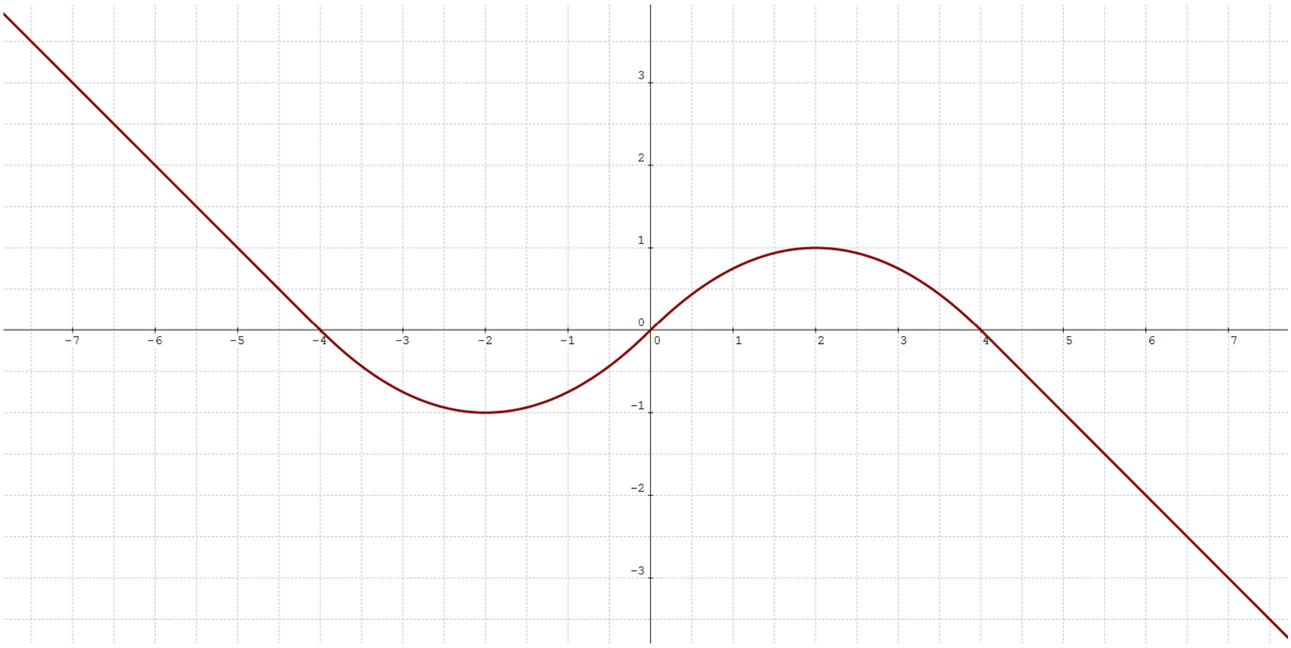


Si $a=1$



Ejercicio 3. 2 puntos

Encuentra la expresión analítica de la función cuya gráfica es la siguiente:



Solución:

Es una función que está definida por cuatro ramas, dos parábolas y dos rectas. Para encontrar las ecuaciones de las parábolas, necesitamos tres puntos por los que pasen. Fijándonos en la gráfica de la función, podemos determinar varios de esos puntos.

Las ramas parabólicas tendrá una ecuación del tipo $y=ax^2+bx+c$; *para encontrar los valores de* a, b *y* c *necesitamos tres ecuaciones que saldrán de sustituir tres de los puntos, por los que pasa la función, en la ecuación de la parábola.*

La primera de las parábolas está definida en el intervalo $[-4\ ,\ 0]$. *Tomamos los puntos* $A(-4,0)$, $B(-2,-1)$ *y* $C(0,0)$

Tenemos el sistema $\begin{cases} 16a-4b+c=0 \\ 4a-2b+c=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-b=0 \\ 4a-2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow$ *La parábola es* $y=\dfrac{x^2}{4}+x$

La segunda de las parábolas está definida en el intervalo $[0\ ,\ 4]$. *Tomamos los puntos* $C(0,0)$, $D(2,1)$ *y* $E(4,0)$

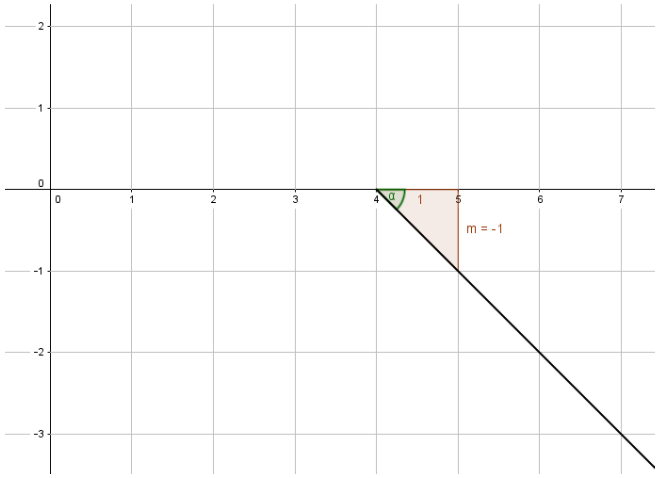
(los extremos del intervalo pueden valer para cualquiera de las dos ramas)

Tenemos el sistema $\begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=1 \\ 16a+4b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow$ *La parábola es* $y=-\dfrac{x^2}{4}+x$

Para encontrar la ecuación de cada recta podemos proceder del mismo modo, sustituyendo dos puntos por los que pase en la ecuación $y=mx+b$ *y resolviendo el sistema resultante.*

También podemos buscar la pendiente en la gráfica y, con un punto, aplicar la fórmula de la recta en punto pendiente $y-y_0=m(x-x_0)$

Como ambas rectas tienen la misma pendiente, será más rápido si usamos esta última fórmula.



La pendiente m es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal, $m=tg\,\alpha$

Como la recta es decreciente, esa pendiente será negativa, $m=-1$ *y un punto por el que pasa la primera recta es* $(-5,1)$

$\Rightarrow\ y-1=-1(x+5)\ \Rightarrow$ *la ecuación es* $y=-x-4$

La segunda recta pasa por el punto $(5,-1)$, *con lo que su ecuación será* $y+1=-1(x-5)\ \Rightarrow\ y=-x+4$

Entonces la función será:

$$f(x)=\begin{cases} -x-4 & si\ \ x<-4 \\ \dfrac{x^2}{4}+x & si\ \ -4\le x<0 \\ -\dfrac{x^2}{4}+x & si\ \ 0\le x\le 4 \\ -x+4 & si\ \ x>4 \end{cases}$$

Ejercicio 4. 4 puntos

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-2x}{x+3} & si\ \ x<-1 \\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-4x} & si\ \ x\ge -1 \end{cases}$$

– Encuentra las asíntotas de $f(x)$ y estudia la posición de la gráfica respecto de ellas.

– Estudia la continuidad de la función $f(x)$.

Solución:

Es una función que está definida por dos ramas, buscamos asíntotas en ambas.

Asíntotas horizontales: si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1-2x}{x}}{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{1+\frac{3}{x}} = \frac{0-2}{1+0} = -2 \Rightarrow \quad y=-2 \text{ es asíntota horizontal para } f(x) \text{ cuando } x\to-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-8}{2x^2-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-8}{x^3}}{\frac{2x^2-4x}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{8}{x^3}}{\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{1-0}{0-0} \to +\infty \Rightarrow \text{ cuando } x\to+\infty,\ f(x) \text{ no tiene asíntota horizontal.}$$

Veamos si, cuando $x\to+\infty$, $f(x)$ *tiene asíntota oblicua. Se cumplirá que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(mx+b) \Rightarrow \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) \end{cases}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-8}{2x^2-4x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-8}{2x^3-4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-8}{x^3}}{\frac{2x^3-4x^2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{8}{x^3}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-8}{2x^2-4x} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-8-x\left(x^2-2x\right)}{2x^2-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-8}{2x^2-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2-8}{x^2}}{\frac{2x^2-4x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{8}{x^2}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{2-0}{2-0} = 1 \Rightarrow b = 1$$

La recta $y = \frac{x}{2}+1$ *es asíntota oblicua para* $f(x)$ *cuando* $x\to+\infty$

Buscamos ahora las asíntotas verticales. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \to \infty \Rightarrow$ *la recta* $x = x_0$ *es una asíntota vertical para* $f(x)$.

Como $f(x)$ *está definida por fracciones algebraicas, debemos buscar asíntotas verticales en los puntos donde se anulen los denominadores.*

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ *que es un punto del intervalo* $(-\infty,-1)$, *en el que está definida esa rama.*

$$\lim_{x\to-3} \frac{1-2x}{x+3} \to \frac{7}{0} \to \infty \ ; \quad \text{analizamos los límites laterales:} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-3^-} \frac{1-2x}{x+3} = \frac{7}{0^-} \to -\infty \\ \lim\limits_{x\to-3^+} \frac{1-2x}{x+3} = \frac{7}{0^+} \to +\infty \end{cases} \quad x=-3 \text{ es asíntota vertical para } f(x).$$

$2x^2-4x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ *que son puntos del intervalo* $[-1,+\infty)$, *en el que está definida esa rama.*

$$\lim_{x\to0} \frac{x^3-8}{2x^2-4x} \to \frac{-8}{0} \to \infty \ ; \quad \text{analizamos los límites laterales:} \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^3-8}{2x(x-2)} = \frac{-8}{0^-\cdot(-2)} \to -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^3-8}{2x(x-2)} = \frac{-8}{0^+\cdot(-2)} \to +\infty \end{cases} \quad x=0 \text{ es asíntota vertical para } f(x).$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{2x^2-4x} \to \frac{0}{0} \to \lim_{x\to2} \frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{2x(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{x^2+2x+4}{2x} = 3 \Rightarrow \text{ en } x=2 \text{ no hay asíntota vertical para } f(x).$$

Basándonos en lo analizado anteriormente, podemos determinar que $f(x)$ *presenta dos discontinuidades de tipo infinito, una en* $x=-3$ *y otra en* $x=0$.

Como $f(2)$ *no existe y* $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3 \Rightarrow f(x)$ *presenta una discontinuidad evitable en* $x=2$.

Nos falta estudiar la continuidad en el punto $x=-1$, *punto de enlace de las dos ramas.*

$$f(-1)=\frac{(-1)^3-8}{2(-1)^2-4(-1)}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1-2x}{x+3}=\dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3-8}{2x^2-4x}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) \text{ no existe y como los límites laterales no tienden a infinito } \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ *presenta una discontinuidad de tipo finito en* $x=-1$.

La gráfica de la función $f(x)$ *sería:*