EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA. (Soluciones)

Ejercicio 15.

Resuelve la ecuación: $\cos x + sen\, x = \dfrac{\cos 2x}{1 - sen\, 2x}$

$$sen\, x + cos x = \frac{cos\, 2x}{1 - sen\, 2x} \Rightarrow cos\, x + sen\, x = \frac{cos^2 x - sen^2 x}{1 - sen\, 2x} \Rightarrow (cos\, x + sen\, x)(1 - sen\, 2x) = (cos\, x + sen\, x)(cos\, x - sen\, x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (cos\, x + sen\, x)(1 - sen\, 2x) - (cos\, x + sen\, x)(cos\, x - sen\, x) = 0 \Rightarrow (cos\, x + sen\, x)\left[(1 - sen\, 2x) - (cos\, x - sen\, x)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\, x + sen\, x = 0 \Rightarrow sen\, x = -cos\, x \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 315^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 135^\circ + k \cdot 180^\circ \\ (1 - sen\, 2x) - (cos\, x - sen\, x) = 0 \Rightarrow 1 - 2sen\, x \cdot cos\, x - cos\, x + sen\, x = 0 \Rightarrow 1 + sen\, x = 2sen\, x \cdot cos\, x + cos\, x \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + sen\, x = (2sen\, x + 1) \cdot cos\, x \Rightarrow (1 + sen\, x)^2 = (2sen\, x + 1)^2 \cdot cos^2 x \Rightarrow (1 + sen\, x)^2 = (2sen\, x + 1)^2 (1 - sen^2 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + sen\, x)^2 = (2sen\, x + 1)^2 (1 + sen\, x)(1 - sen\, x) \Rightarrow (1 + sen\, x)^2 - (2sen\, x + 1)^2 (1 + sen\, x)(1 - sen\, x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + sen\, x)\left[(1 + sen\, x) - (2sen\, x + 1)^2 (1 - sen\, x)\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + sen\, x = 0 \Rightarrow sen\, x = -1 \Rightarrow x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ \\ (1 + sen\, x) - (2sen\, x + 1)^2 (1 - sen\, x) = 0 \end{cases}$$

$$(1 + sen\, x) - (2sen\, x + 1)^2 (1 - sen\, x) = 0 \Rightarrow 1 + sen\, x - (4sen^2 x + 4sen\, x + 1)(1 - sen\, x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + sen\, x - 4sen^2 x + 4sen^3 x - 4sen\, x + 4sen^2 x - 1 + sen\, x = 0 \Rightarrow 4sen^3 x - 2sen\, x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2sen\, x(2sen^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\, x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \\ 2sen^2 x - 1 = 0 \Rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} sen\, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \\ sen\, x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 315^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado en una ecuación, suelen aparecer soluciones no válidas por lo que es necesario comprobarlas.
Así vemos que los valores $x = 45^\circ$, $x = 225^\circ$ y $x = 180^\circ$ no verifican la ecuación.
Entonces las soluciones de la ecuación son: $\{x = 135^\circ + k \cdot 180^\circ \;,\; x = k \cdot 360^\circ \;,\; x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ\}$

Ejercicio 16.

Resuelve la ecuación: $cos\, x + cos\, 2x + cos\, 3x = 0$

$$cos\, x + cos\, 2x + cos\, 3x = 0 \Rightarrow (cos\, 3x + cos\, x) + cos\, 2x = 0 \Rightarrow 2cos \frac{3x + x}{2} \cdot cos \frac{3x - x}{2} + cos\, 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2cos\, 2x \cdot cos\, x + cos\, 2x = 0 \Rightarrow cos\, 2x \cdot (2cos\, x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} cos\, 2x = 0 \\ 2cos\, x + 1 = 0 \Rightarrow cos\, x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos\, 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \\ 2x = 270^\circ \Rightarrow x = 135^\circ \\ 2x = 450^\circ \Rightarrow x = 225^\circ \\ 2x = 630^\circ \Rightarrow x = 315^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ \quad ; \quad cos\, x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Ejercicio 21.

Si $x+y+z=\pi$, probar que $sen\,x+sen\,y+sen\,z=4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{z}{2}$

Antes de abordar la igualdad debemos tener en cuenta:

$$x+y+z=\pi \Rightarrow z=\pi-(x+y) \Rightarrow \begin{cases} sen\,z=sen(x+y) \\ cos\,z=-cos(x+y)\end{cases} \quad / \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{z}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} sen\frac{z}{2}=cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ cos\frac{z}{2}=sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{cases}$$

$$sen\,2\alpha=2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha \Rightarrow \quad sen\,z=sen\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right)=sen\,2\left(\frac{z}{2}\right)=2sen\frac{z}{2}\cdot cos\frac{z}{2}$$

$$sen\,x+sen\,y+sen\,z=2sen\frac{x+y}{2}\cdot cos\frac{x-y}{2}+sen\,z=2cos\frac{z}{2}\cdot cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)+sen\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right)=$$

$$=2cos\frac{z}{2}\cdot\left(cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}+sen\frac{x}{2}\cdot sen\frac{y}{2}\right)+2sen\frac{z}{2}\cdot cos\frac{z}{2}=2cos\frac{z}{2}\cdot\left(cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}+sen\frac{x}{2}\cdot sen\frac{y}{2}+sen\frac{z}{2}\right)=$$

$$=2cos\frac{z}{2}\cdot\left(cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}+sen\frac{x}{2}\cdot sen\frac{y}{2}+cos\frac{x+y}{2}\right)=2cos\frac{z}{2}\cdot\left(cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}+\cancel{sen\frac{x}{2}\cdot sen\frac{y}{2}}+cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}-\cancel{sen\frac{x}{2}\cdot sen\frac{y}{2}}\right)=$$

$$=2cos\frac{z}{2}\cdot\left(cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}+cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}\right)=2cos\frac{z}{2}\cdot\left(2cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}\right)=4cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{y}{2}\cdot cos\frac{z}{2}$$

Ejercicio 33.

Resolver la ecuación $sen\,ax\cdot sen\,bx=sen\,cx\cdot sen\,dx$, siendo $a,\ b,\ c,\ d$ positivos y en progresión aritmética.

$$a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d \quad \text{son números positivos en progresión aritmética} \Rightarrow \text{llamamos } n \text{ a la diferencia} \Rightarrow \begin{cases} b=a+n \\ c=a+2n \\ d=a+3n\end{cases}$$

$$\text{tenemos que: } cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\cdot cos\,\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta-(cos\,\alpha\cdot cos\,\beta+sen\,\alpha\cdot sen\,\beta)=$$
$$=cos\,\alpha\cdot cos\,\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta-cos\,\alpha\cdot cos\,\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta=-2sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$$

$$\text{Entonces: } sen\,ax\cdot sen\,bx=sen\,cx\cdot sen\,dx \Rightarrow -2sen\,ax\cdot sen\,bx=-2sen\,cx\cdot sen\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow cos(ax+bx)-cos(ax-bx)=cos(cx+dx)-cos(cx-dx) \Rightarrow cos(a+b)x-cos(a-b)x=cos(c+d)x-cos(c-d)x$$

$$(a+b=2a+n \quad , \quad a-b=-n \quad , \quad c+d=2a+5n \quad , \quad c-d=-n)$$

$$\Rightarrow cos(2a+n)x-\cancel{cos(-n)x}=cos(2a+5n)x-\cancel{cos(-n)x} \Rightarrow cos(2ax+nx)=cos(2ax+5nx) \Rightarrow \begin{cases} 2ax+nx=2ax+5nx \\ o \\ 2ax+nx=-(2ax+5nx)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax+nx=2ax+5nx \Rightarrow 0=4nx \Rightarrow 4nx=k\cdot 2\pi \Rightarrow x=\frac{k\cdot 2\pi}{4n} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{c+d-a-b} \\ 2ax+nx=-(2ax+5nx) \Rightarrow 4ax+6nx=0 \Rightarrow (4a+6n)x=k\cdot 2\pi \Rightarrow x=\frac{k\cdot 2\pi}{4a+6n} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{a+b+c+d}\end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$