DERIVADAS

Derivadas de funciones elementales:

$$f(x)=k\,,\quad k\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0$$

$$f(x)=x^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$f(x)=\ln x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x)=e^x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^x$$

$$f(x)=sen\,x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=cos\,x$$

$$f(x)=cos\,x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-sen\,x$$

$$f(x)=tg\,x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{cos^2 x}=1+tg^2 x$$

Reglas de derivación:

Derivada de una suma de funciones:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

Derivada de un producto de funciones:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Derivada de un cociente de funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Derivada de una composición de funciones:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Derivada de funciones inversas

$f^{-1}(x)$ *es la función inversa de* $f(x) \Leftrightarrow (f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$$(f\circ f^{-1}): x\xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x)=y\xrightarrow{f} f(y)=x$$

Sea la función $y=f^{-1}(x)$, *derivando en los dos lados de la igualdad* $(f\circ f^{-1})(x)=x$ *tenemos que:*

$$(f\circ f^{-1})'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad f'(y)\cdot(f^{-1})'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$$

Ejemplos:

La función $f^{-1}(x)=arctg(x)$ *es inversa de la función* $f(x)=tg(x)$

tenemos las funciones $y=arctg(x)\,,\ x=tg(y) \quad\Rightarrow\quad x\xrightarrow{arctg} arctg(x)=y\xrightarrow{tg} tg(y)=x$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(tg\,y)'}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad Si\quad y=arctg(x)\ ,\quad y'=\frac{1}{1+x^2}$$

La función $f^{-1}(x)=arcsen(x)$ *es inversa de la función* $f(x)=sen(x)$

tenemos las funciones $y=arcsen(x)\,,\ x=sen(y) \quad\Rightarrow\quad x\xrightarrow{arcsen} arcsen(x)=y\xrightarrow{sen} sen(y)=x$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(sen\,y)'}=\frac{1}{cos\,y}=\frac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad Si\quad y=arcsen(x)\ ,\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La función $f^{-1}(x)=arcos(x)$ *es inversa de la función* $f(x)=cos(x)$

tenemos las funciones $y=arcos(x)\,,\ x=cos(y) \quad\Rightarrow\quad x\xrightarrow{arcos} arcos(x)=y\xrightarrow{cos} cos(y)=x$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(cos\,y)'}=\frac{1}{-sen\,y}=\frac{-1}{\sqrt{1-cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad Si\quad y=arcos(x)\ ,\quad y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivación logarítmica:

$$y=\left[f(x)\right]^{g(x)} \;\Rightarrow\; \ln y = g(x)\cdot\ln\left[f(x)\right] \xrightarrow{\text{derivando en ambos lados de la igualdad}} (\ln y)' = g'(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{y'}{y}=g'(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \;\Rightarrow\; y'=\left[g'(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\cdot y$$

$$y'=\left[g'(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\cdot\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

Ejemplos:

$y=a^x$

$$\ln y=\ln a^x \;\Rightarrow\; \ln y = x\cdot\ln a \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y}=\ln a \;\Rightarrow\; y'=y\cdot\ln a \;\Rightarrow\; y'=a^x\cdot\ln a$$

$y=\left(x^2+1\right)^x$

$$\ln y=\ln\left(x^2+1\right)^x \;\Rightarrow\; \ln y = x\cdot\ln\left(x^2+1\right) \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y}=\ln\left(x^2+1\right)+x\cdot\frac{2x}{x^2+1} \;\Rightarrow$$

$$y'=\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)\cdot y \;\Rightarrow\; y'=\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)\cdot\left(x^2+1\right)^x$$

$y=\sqrt[x]{tg\,x}$

$$\ln y=\ln\left(tg\,x\right)^{\frac{1}{x}} \;\Rightarrow\; \ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(tg\,x\right) \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(tg\,x\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{cos^2 x}}{tg\,x} \;\Rightarrow$$

$$y'=\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(tg\,x\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg\,x\cdot cos^2 x}\right)\cdot y \;\Rightarrow\; y'=\left(-\frac{\ln\left(tg\,x\right)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot sen\,x\cdot cos\,x}\right)\cdot\sqrt[x]{tg\,x}$$

$y=\left(sen\,x\right)^{cos\,x}$

$$\ln y=\ln\left(sen\,x\right)^{cos\,x} \;\Rightarrow\; \ln y=cos\,x\cdot\ln\left(sen\,x\right) \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y}=-sen\,x\cdot\ln\left(sen\,x\right)+cos\,x\cdot\frac{cos\,x}{sen\,x} \;\Rightarrow$$

$$y'=\left[-sen\,x\cdot\ln\left(sen\,x\right)+cos\,x\cdot\frac{cos\,x}{sen\,x}\right]\cdot y \;\Rightarrow\; y'=\left[-sen\,x\cdot\ln\left(sen\,x\right)+cos\,x\cdot cotg\,x\right]\cdot\left(sen\,x\right)^{cos\,x}$$