CAMBIOS DE VARIABLE EN LA INTEGRAL INDEFINIDA

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuando tenemos que integrar funciones racionales en las variables $sen\,x$ y $cos\,x$ es aconsejable realizar un cambio de variable para convertirla en una función racional de variable t.

- Cambio $tg\frac{x}{2}=t$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{sen\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} \Rightarrow tg^2\frac{x}{2}=\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x} \Rightarrow t^2=\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x} \Rightarrow t^2+t^2cos\,x=1-cos\,x \Rightarrow t^2cos\,x+cos\,x=1-t^2$$

$$\Rightarrow (1+t^2)cos\,x=1-t^2 \Rightarrow cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow entonces\ \ sen\,x=\sqrt{1-cos^2x} \Rightarrow sen\,x=\sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}=\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}$$

$$\Rightarrow sen\,x=\frac{\sqrt{4t^2}}{1+t^2} \Rightarrow sen\,x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$y\ además\ \ tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow d\left(tg\frac{x}{2}\right)=dt \Rightarrow \left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dx=dt \Rightarrow (1+t^2)\cdot\frac{1}{2}dx=dt \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$Luego\ \ tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow \left\{sen\,x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\right\}$$

Ejemplo:

$$\int sec\,x\,dx=\int\frac{1}{cos\,x}dx=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\cdot\int\frac{1}{1-t^2}dt=2\int\left(\frac{1/2}{1+t}+\frac{1/2}{1-t}\right)dt=\int\frac{1}{1+t}dt-\int\frac{-1}{1-t}dt=\ln|1+t|-\ln|1-t|=$$

$$=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1-tg\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{a}{1+t}+\frac{b}{1-t}=\frac{a(1-t)+b(1+t)}{(1+t)(1-t)}=\frac{(b-a)t+(a+b)}{(1+t)(1-t)} \Rightarrow \begin{cases}-a+b=0\\ a+b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

- Cambio $sen\,x=t$, es aconsejable cuando la función racional es impar en $cos\,x$.

$$sen\,x=t \Rightarrow cos\,x=\sqrt{1-sen^2x} \Rightarrow cos\,x=\sqrt{1-t^2}\ \ ;\ \ d(sen\,x)=dt \Rightarrow cos\,x\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{cos\,x} \Rightarrow dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\left\{sen\,x=t\ ,\ cos\,x=\sqrt{1-t^2}\ ,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}$$

Ejemplo:

$$\int\frac{cos^3x}{sen^2x}dx=\int\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=\int\frac{1}{t^2}dt-\int dt=\int t^{-2}dt-\int dt=\frac{t^{-1}}{-1}-t=-\frac{1}{sen\,x}-sen\,x+C$$

– Cambio $cos\,x = t$, es aconsejable cuando la función racional es impar en $sen\,x$.

$$cos\,x = t \;\Rightarrow\; sen\,x = \sqrt{1-cos^2 x} \;\Rightarrow\; sen\,x = \sqrt{1-t^2} \quad ; \quad d(cos\,x) = dt \;\Rightarrow\; -sen\,x\,dx = dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{-dt}{sen\,x} \;\Rightarrow\; dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\left\{ cos\,x = t \;\; , \;\; sen\,x = \sqrt{1-t^2} \;\; , \;\; dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \right\}$$

Ejemplo :

$$\int \frac{cos^4 x}{sen\,x} dx = \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{t^4}{1-t^2} dt = -\int \left(-t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2} \right) dt = \int t^2\,dt + \int dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t} dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln|1-t| = \frac{cos^3 x}{3} + cos\,x - \frac{1}{2}\ln|1+cos\,x| + \frac{1}{2}\ln|1-cos\,x| + C$$

– Cambio $tg\,x = t$, es aconsejable cuando la función racional es par en $sen\,x$ y $cos\,x$.

$$tg\,x = t \;\Rightarrow\; tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{sen\,x}{\sqrt{1-sen^2 x}} \;\Rightarrow\; tg^2 x = \frac{sen^2 x}{1-sen^2 x} \;\Rightarrow\; t^2 = \frac{sen^2 x}{1-sen^2 x} \;\Rightarrow\; t^2 - t^2 sen^2 x = sen^2 x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; t^2 sen^2 x + sen^2 x = t^2 \;\Rightarrow\; (1+t^2)\,sen^2 x = t^2 \;\Rightarrow\; sen^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \;\Rightarrow\; sen\,x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$cos\,x = \sqrt{1-sen^2 x} \;\Rightarrow\; cos\,x = \sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}} \;\Rightarrow\; cos\,x = \sqrt{\frac{1+t^2-t^2}{1+t^2}} \;\Rightarrow\; cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$d(tg\,x) = dt \;\Rightarrow\; (1+tg^2 x)\,dx = dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$tg\,x = t \;\Rightarrow\; \left\{ sen\,x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \;\; , \;\; cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \;\; , \;\; dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\}$$

Ejemplo :

$$\int \frac{dx}{sen^2 x\; cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \int t^{-2}\,dt + \int dt = \frac{t^{-1}}{-1} + t = tg\,x - \frac{1}{tg\,x} + C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, cambio indicado $\begin{cases} x = a \cdot sen\,t \\ dx = a \cdot cos\,t\,dt \end{cases}$ o también $\begin{cases} x = a \cdot cos\,t \\ dx = -a \cdot sen\,t\,dt \end{cases}$

$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$, cambio indicado $\begin{cases} x = a \cdot tg\,t \\ dx = \dfrac{a}{cos^2 t} dt \end{cases}$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$, cambio indicado $\begin{cases} x = a \cdot sec\,t \\ dx = \dfrac{a \cdot sen\,t}{cos^2 t} dt \end{cases}$