

**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Curso **2024-2025**MATERIA: **MATEMÁTICAS II****INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}.$$

- a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
- b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Pregunta 1.2. Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

- a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las matrices

diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

- b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D , distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.
- b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.
- c) (0.75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$.

Pregunta 2.2. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}.$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Bloque 3. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3. Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V_1 cuyos extremos son los puntos $A(1, 2, -3)$ y $B(1, 6, 1)$ y V_2 cuyos extremos son los puntos $C(-2, -8, 7)$ y $D(10, -4, 7)$.

- a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V_1 y V_2 . Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V_1 y con V_2 .
- b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V_1 como a V_2 . Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En una empresa tecnológica internacional el 70 % de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de *software*, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de *software* en la empresa.
- b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan *software* para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Pregunta 4.2. Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$.

- a) (0.5 puntos) Razone si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos sucesos independientes.
- b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.
- c) (1 punto) Calcule $P(\bar{A} | B)$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.1.

- a) Por cada caso correctamente determinado: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo correcto de la solución: 0.75 puntos.

1.2.

- a) Planteamiento del sistema lineal: 0.75 puntos. Resolución del sistema: 0.25 puntos. Reconocer las soluciones del sistema apropiadas: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución 0.5 puntos.

2.1.

- a) Cálculo del dominio: 0.5 puntos. Determinación correcta de la paridad: 0.25 puntos.
- b) Cada límite: 0.5 puntos.
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.2.

Descomposición del integrando en fracciones simples: 0.25 puntos. Resolución de la integral del polinomio cociente: 0.25 puntos. Resolución de la integral tipo logaritmo y tipo arcotangente: 0.75 puntos cada una. Cálculo de la primitiva utilizando $F(0)$: 0.5 puntos.

3.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de extremos: 0.25 puntos. Cálculo del coseno de los ángulos: 0.25 puntos por cada uno.
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de extremos: 0.75 puntos. No restar puntos si no justifican que los extremos de la viga auxiliar están en las otras vigas.

4.1.

- a) Planteamiento de la probabilidad a calcular: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

4.2.

- a) Cálculo correcto de $P(\overline{A})P(\overline{B})$: 0.25 puntos. Respuesta correcta y justificada: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.1.

a) La matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$

tiene determinante $-2\lambda^2 + 8$. El sistema es compatible determinado si $\lambda \notin \{-2, 2\}$ pues en tales casos la matriz de coeficientes tiene rango 3 y coincide con el de la ampliada.

Si $\lambda = -2$, la matriz ampliada del sistema tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 2$, la matriz ampliada del sistema tiene rango 2. Como el rango de la matriz de coeficientes es 2 e igual al de la ampliada, y el número de incógnitas, 3, es superior, el sistema es compatible indeterminado.

b) En este caso la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix}, \text{ es equivalente por filas con } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y con } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el conjunto de soluciones es $\{(-5 - 7t, -12 - 11t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

1.2.

a) Si $D = \text{diag}(x, y, z)$, para que DA sea estocástica se debe verificar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases},$$

cuyas soluciones son $x = 1$, $y = \lambda$ y $z = 2 - \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Ahora bien, como los elementos de una matriz estocástica han de ser no negativos, solamente nos valen las soluciones con x , y y z no negativos. En definitiva, DA es estocástica si $D = \text{diag}(1, \lambda, 2 - \lambda)$ y $\lambda \in [0, 2]$.

b) Al multiplicar por la derecha una matriz cuadrada, B , de orden 3 por una matriz diagonal, cada columna de B queda multiplicada por el correspondiente elemento de la diagonal. Por lo tanto, la única matriz diagonal que hace que BD sea estocástica es la identidad.

2.1.

a) Como $f(x) = \sqrt{x(x+3)}$, el dominio de la función es $(-\infty, -3] \cup [0, \infty)$. Dado que $f(-x) = \sqrt{x^2 - 3x}$, la función no es ni par ni impar.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} = -1 \text{ y, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = -\frac{3}{2}.$$

c) Tenemos que $f(1) = 2$, $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$ con lo que $f'(1) = \frac{5}{4}$. La ecuación de la recta tangente pedida es:
 $y = \frac{5}{4}(x-1) + 2.$

2.2.

$F(x) = \int f(x)dx$. Al dividir numerador entre denominador se obtiene de cociente el polinomio $x - 1$ y de resto $9 - 9x$. La integral del cociente: $\int (x - 1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C$. La integral: $\int \frac{9 - 9x}{x^2 + 9}dx = 3\arctg\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\ln(x^2 + 9) + C$.

Por lo tanto: $F(x) = \int \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}dx = \frac{x^2}{2} - x + 3\arctg\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\ln(x^2 + 9) + C$. Como $F(0) = \ln 3$, se obtiene $C = 10\ln 3$.

3.

a) Calculamos el punto medio de V_1 , $P_1(1, 4, -1)$, y el de V_2 , $P_2 = (4, -6, 7)$. Los extremos de la viga añadida, V_3 , son: $(1, 4, -1)$ y $(4, -6, 7)$.

El coseno del ángulo formado entre V_3 y V_1 es $\cos \alpha_1 = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{P_1P_2}\|} = \frac{2\sqrt{346}}{346}$ y entre V_3 y V_2 es $\cos \alpha_2 = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{\|\overrightarrow{CD}\| \|\overrightarrow{P_1P_2}\|} = \frac{\sqrt{1730}}{1730}$.

b) Buscamos la recta perpendicular común a las rectas que pasan por A y B , y por C y D , r_1 y r_2 , respectivamente. Tenemos que $r_1 \equiv (x, y, z) = (1, 2 + \lambda_1, -3 + \lambda_1)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (-2 + 3\lambda_2, -8 + \lambda_2, 7)$. Buscamos un vector que yendo de un punto de la recta r_1 y otro punto de la recta r_2 sea perpendicular tanto a $\overrightarrow{AB}$ como $\overrightarrow{CD}$, es decir: $(-3 + 3\lambda_2, -10 + \lambda_2 - \lambda_1, 10 - \lambda_1) \cdot (0, 1, 1) = 0$ y $(-3 + 3\lambda_2, -10 + \lambda_2 - \lambda_1, 10 - \lambda_1) \cdot (3, 1, 0) = 0$. Obtenemos que $\lambda_1 = 1$ por lo que el punto en r_1 es $(1, 3, -2)$ (uno de los extremos de la viga) y $\lambda_2 = 2$ por lo que el punto en r_2 es $(4, -6, 7)$ (otro de los extremos de la viga). Quedaría verificar que ambos puntos están en V_1 y V_2 . Dado que A se corresponde con $\lambda_1 = 0$ y B con $\lambda_1 = 4$, el extremo en r_1 se obtiene con $\lambda_1 = 1$ que pertenece al intervalo $(0, 4)$. Dicho extremo está en V_1 . De igual manera para el extremo en r_2 : para C tenemos $\lambda_2 = 0$, para D , $\lambda_2 = 4$, y para el extremo de V_3 , $\lambda_2 = 2 \in (0, 4)$. Los extremos de la viga V_3 son $(1, 3, -2)$ y $(4, -6, 7)$.

4.1.

Tomado un empleado al azar denotemos por E el suceso “el empleado elegido es europeo”, por S el suceso “el empleado elegido se dedica al desarrollo de *software*”, $\overline{E}$ y $\overline{S}$ los sucesos complementarios a E y S , respectivamente. Del enunciado se tienen las siguientes probabilidades

$$P(E) = 0.7, P(S | \overline{E}) = \frac{1}{3} \text{ y } P(S | E) = \frac{3}{7}.$$

a) Nos preguntan la probabilidad del suceso $E \cap \overline{S}$:

$$P(E \cap \overline{S}) = P(\overline{S} | E)P(E) = (1 - P(S | E))P(E) = \frac{4}{7} \cdot 0.7 = 0.4.$$

b) Si X es la variable aleatoria “número de empleados entre los 10 elegidos al azar que desarrollan *software* en la empresa”, esta sigue una distribución Binomial(n, p) con $n = 10$ y $p = P(S)$. Por la regla de la probabilidad total se tiene que

$$P(S) = P(S | E)P(E) + P(S | \overline{E})P(\overline{E}) = \frac{3}{7} \cdot 0.7 + \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.7) = 0.3 + 0.1 = 0.4.$$

La empresa tendrá que dar el segundo paquete de acciones si $X \leq 2$, luego lo hará con probabilidad

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.6^{10} + 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^9 + 45 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^8 \approx 0.1673.$$

4.2.

a) Como $P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))P(\overline{B}) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$ es distinto de $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1$, se concluye que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ no son sucesos independientes.

b) Se sabe que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Utilizando los diagramas de Venn se calcula la siguiente probabilidad:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1.$$

Luego $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 0.9$. De aquí se obtiene que $P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.9 = 0.6$.

$$c) P(\overline{A} | B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(B)} = 0.25.$$