SOLUCIONES. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Ejercicio nº 1.-

Tenemos que $2x^4+5x^3-7x^2-10x+6=\left(x^2-2\right)\cdot p(x)$. Halla el polinomio $p(x)$ y el número $p(-2)$.

$$Si\quad 2x^4+5x^3-7x^2-10x+6=\left(x^2-2\right)\cdot p(x)\quad\rightarrow\quad p(x)=\left(2x^4+5x^3-7x^2-10x+6\right):\left(x^2-2\right)$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4+5x^3-7x^2-10x+6 & x^2-2 \\
\hline
-2x^4 & \qquad +4x^2 & 2x^2+5x-3 \\
\hline
 & 5x^3-3x^2-10x+6 & \\
 & -5x^3 \qquad +10x & \\
\hline
 & -3x^2 \qquad +6 & \\
 & +3x^2 \qquad -6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$\rightarrow \qquad p(x)=2x^2+5x-3$$

$$p(-2)=2(-2)^2+5(-2)-3=8-10-3=-5$$

Ejercicio nº 2.-

Efectúa y simplifica:

$$(x+3)\cdot(x-2)^2-(2x-1)^2-x\cdot(1-x)=(x+3)\left(x^2-4x+4\right)-\left(4x^2-4x+1\right)-x+x^2=$$
$$=x^3-4x^2+4x+3x^2-12x+12-4x^2+4x-1-x+x^2=x^3-4x^2-5x+11$$

Ejercicio nº 3.-

Extrae factor común en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3xy^2+12x^2y^2-9x^2y^3=3xy^2(1+4x-3xy)$

b) $\left(x^2-5x\right)\cdot(x+3)-x(x+3)+(x+3)\left(x^2+2x\right)=(x+3)\left(x^2-5x-x+x^2+2x\right)=(x+3)\left(2x^2-4x\right)=2x(x+3)(x-2)$

Ejercicio nº 4.-

Extrae factor común y reconoce algún producto notable para factorizar al máximo la siguiente expresión algebraica:

$$(2x-3)\left(x^2-4x\right)-(2x-3)+(2x-3)(4x-8)=(2x-3)\left(x^2-4x-1+4x-8\right)=(2x-3)\left(x^2-9\right)=(2x-3)(x+3)(x-3)$$

Ejercicio nº 5.-

Dado el polinomio $p(x)=2x^3-x^2-15x+18$.

- Calcula el valor numérico de $p(x)$ para $x=-3$.

  $p(-3)=2(-3)^3-(-3)^2-15(-3)+18=-54-9+45+18=0$

- Factoriza el polinomio $p(x)$.

  Como $p(-3)=0 \rightarrow p(x)$ *es divisible entre* $(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -15 & 18 \\ -3 & & -6 & 21 & -18 \\ \hline & 2 & -7 & 6 & \lfloor 0 \\ 2 & & 4 & -6 & \\ \hline & 2 & -3 & \lfloor 0 & \end{array}$$

  Entonces, $p(x)=(x+3)(x-2)(2x-3)$

Ejercicio nº 6.-

Realiza las operaciones y encuentra la fracción irreducible:

$$\frac{x-3}{x+3}+\frac{4x-6}{x^2+3x}=\frac{x(x-3)}{x(x+3)}+\frac{4x-6}{x(x+3)}=\frac{x^2-3x+4x-6}{x(x+3)}=\frac{x^2+x-6}{x(x+3)}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{x\cancel{(x+3)}}=\frac{x-2}{x}$$

Para poder simplificar, x^2+x-6 *tiene que ser divisible entre alguno de los factores del denominador.*

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ -3 & & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad x^2+x-6=(x+3)(x-2)$$

Ejercicio nº 7.-

Comprueba que $x=-2$ es una raíz del polinomio $p(x)=x^3-4x^2-3x+18$. Descompón en factores $p(x)$ y encuentra todos sus divisores.

Para probar que $x=-2$ *es una raíz de* $p(x)$ *calculamos* $p(-2)=(-2)^3-4(-2)^2-3(-2)+18=-8-16+6+18=0$

Como $p(-2)=0 \rightarrow p(x)$ *es divisible entre* $(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -3 & 18 \\ -2 & & -2 & 12 & -18 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & \lfloor 0 \\ 3 & & 3 & -9 & \\ \hline & 1 & -3 & \lfloor 0 & \end{array}$$

Entonces, $p(x)=(x+2)(x-3)(x-3) \rightarrow p(x)=(x+2)(x-3)^2$

Los divisores de $p(x)$ *son:* 1, $(x+2)$, $(x-3)$, $(x+2)(x-3)$, $(x-3)^2$ *y* $(x+2)(x-3)^2$

Ejercicio nº 8.-

Encuentra a para que el valor numérico del polinomio $P(x)=3ax^4-2ax^3+2x-a$ en el punto $x=-1$ sea 10.

$$p(-1)=10 \quad \rightarrow \quad p(-1)=3a(-1)^4-2a(-1)^3+2(-1)-a=3a+2a-2-a=4a-2$$

$$4a-2=10 \quad \rightarrow \quad 4a=12 \quad \rightarrow \quad a=\frac{12}{4}=3 \quad \rightarrow \quad a=3$$

Ejercicio nº 9.-

Efectúa y simplifica:

$$a)\quad \frac{x^2-2x+1}{2x-4}:\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{(x^2-2x+1)(x^2-4)}{(2x-4)(x-1)}=\frac{(x-1)^2(x+2)(x-2)}{2(x-2)(x-1)}=\frac{(x-1)(x+2)}{2}$$

$$b)\quad \frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x}=\frac{x(x+1)}{x(x-1)}-\frac{x^2-x+2}{x(x-1)}=\frac{x^2+x-x^2+x-2}{x(x-1)}=\frac{2x-2}{x(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x(x-1)}=\frac{2}{x}$$

Ejercicio nº 10.-

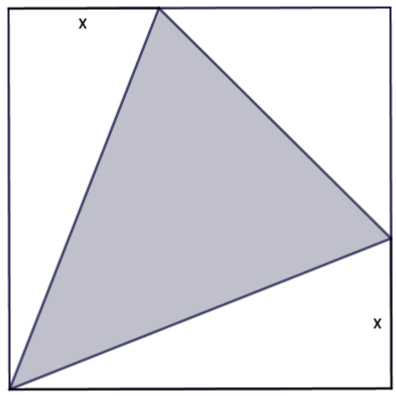
Efectúa y simplifica:

$$a)\quad \frac{1-4x^2}{x^2-6x+9}\cdot\frac{2x-6}{2x^2+x}=\frac{(1-4x^2)(2x-6)}{(x^2-6x+9)(2x^2+x)}=\frac{(1+2x)(1-2x)2(x-3)}{(x-3)^2x(2x+1)}=\frac{2(1-2x)}{x(x-3)}$$

$$b)\quad \frac{3}{x}+\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{x}{x+2}=\frac{3(x+2)}{x(x+2)}+\frac{x-2}{x(x+2)}+\frac{x^2}{x(x+2)}=\frac{3x+6+x-2+x^2}{x(x+2)}=\frac{x^2+4x+4}{x(x+2)}=\frac{(x+2)^2}{x(x+2)}=\frac{x+2}{x}$$

Ejercicio nº 11.-

En un cuadrado de lado 1 decímetro, hemos inscrito el triángulo isósceles sombreado. Expresa el área de dicho triángulo en función de x.



Podemos calcular el área del triángulo isósceles como el área del cuadrado menos el área de los tres triángulos rectángulos que no están coloreados. Dos de esos triángulos son iguales por lo que calcularemos el área de uno de ellos y la multiplicamos por 2.

$$A_{Triángulo} = 1 - 2\cdot\left(\frac{1\cdot x}{2}\right) - \frac{(1-x)(1-x)}{2} = 1 - x - \frac{1-2x+x^2}{2} = \frac{2-2x}{2} - \frac{1-2x+x^2}{2} = \frac{2-2x-1+2x-x^2}{2} = \frac{1-x^2}{2}$$

$$A_{Triángulo} = \frac{1-x^2}{2}$$