ECUACIONES. Soluciones.

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x-\frac{x-2}{2}=2\left(2+\frac{x}{4}\right) \quad \rightarrow \quad 3x-\frac{x-2}{2}=4+\frac{x}{2}$

$$\frac{6x}{2}-\frac{x-2}{2}=\frac{8}{2}+\frac{x}{2}$$

$$6x-x+2=8+x$$

$$4x=6 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

b) $3x(1-x)-4(x+11)+1=2x-(2x-3)^2 \quad \rightarrow \quad 3x-3x^2-4x-44+1=2x-\left(4x^2-12x+9\right)$

$$3x-3x^2-4x-44+1=2x-4x^2+12x-9$$

$$x^2-15x-34=0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-15 \\ c=-34 \end{cases} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 1\cdot(-34)}}{2\cdot 1}=\frac{15\pm\sqrt{225+136}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{15+19}{2}=17 \rightarrow x=17 \\ \frac{15-19}{2}=-2 \rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2

Tenemos que $2x^4-3x^3-2x+3=\left(x^2+x+1\right)\cdot p(x)$.

- Halla el polinomio $p(x)$ y el número $p(-1)$.
- Resuelve la ecuación $2x^4-3x^3-2x+3=0$

Solución:

$$2x^4-3x^3-2x+3=\left(x^2+x+1\right)\cdot p(x) \quad \rightarrow \quad p(x)=\left(2x^4-3x^3-2x+3\right):\left(x^2+x+1\right)$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-3x^3 \qquad -2x+3 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^4-2x^3-2x^2} & 2x^2-5x+3 \\ \quad -5x^3-2x^2-2x+3 & \\ \quad \underline{+5x^3+5x^2+5x} & \\ \qquad\quad 3x^2+3x+3 & \\ \qquad \underline{-3x^2-3x-3} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \quad p(x)=2x^2-5x+3$$

$$p(-1)=2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+3=2+5+3=10$$

$$2x^4-3x^3-2x+3=0 \quad \rightarrow \quad \left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2x^2-5x+3\right)=0 \quad \rightarrow \begin{cases} x^2+x+1=0 \\ 2x^2-5x+3=0 \end{cases}$$

$$x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \quad \rightarrow \quad \textit{no tiene solución real.}$$

$$2x^2-5x+3=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2} \rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{5-1}{4}=1 \rightarrow x=1 \end{array}\right.$$

Ejercicio 3

Un padre, para estimular a su hijo a estudiar matemáticas, le dice: "por cada ejercicio que resuelvas bien te daré 60 céntimos de euro, y por cada uno que hagas mal me darás 30 céntimos de euro". Después de hacer 25 ejercicios, el muchacho se encuentra con 7 euros y 80 céntimos de euro. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien?

Solución:

$\text{Ha resuelto 25 ejercicios y tiene 780 céntimos de euro} \rightarrow \text{Llamamos } x \text{ al número de ejercicios bien resueltos}$

$$\begin{cases} \text{En total ha resuelto 25 ejercicios} \rightarrow \text{El número de ejercicios mal resueltos será } 25-x \\ \text{Suma 60 cent. por cada ejercicio bien hecho y resta 30 cent. por cada ejercicio mal hecho} \rightarrow 60x-30\cdot(25-x)=780 \end{cases}$$

$$60x-30\cdot(25-x)=780 \rightarrow 60x-750+30x=780 \rightarrow 90x=1530 \rightarrow x=\frac{1530}{90}=17$$

$\text{Ha resuelto 17 ejercicios bien y 8 ejercicios mal.}$

Ejercicio 4

Dado el polinomio $p(x)=2x^3-x^2-12x+n$, halla el valor del parámetro "*n*" sabiendo que $(x-3)$ es un divisor de $p(x)$. Para el valor de n encontrado, resuelve la ecuación $2x^3-x^2-12x+n=0$.

Solución:

$p(x)=2x^3-x^2-12x+n$,

$\text{si } (x-3) \text{ es un divisor de } p(x) \rightarrow p(3)=0 \rightarrow 2\cdot 3^3-3^2-12\cdot 3+n=0 \rightarrow 54-9-36+n=0 \rightarrow n=-9$

$\text{Ahora tenemos que resolver la ecuación } 2x^3-x^2-12x-9=0$

$$p(x)=2x^3-x^2-12x-9 \xrightarrow{\text{Factorizamos el polinomio por Ruffini}} \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -12 & -9 \\ 3 & & 6 & 15 & -9 \\ \hline & 2 & 5 & 3 & \lfloor 0 \\ -1 & & -2 & -3 & \\ \hline & 2 & 3 & \lfloor 0 & \end{array}$$

$$\text{Entonces} \quad 2x^3-x^2-12x-9=(x-3)(x+1)(2x+3)$$

$$2x^3-x^2-12x-9=0 \rightarrow (x-3)(2x+3)(x+1)=0 \xrightarrow{\text{las opciones son:}} \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ 2x+3=0 \rightarrow x=-\dfrac{3}{2} \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ (3x+1)\cdot(x^2+4x)\cdot(2x^2-2x-4)=0$

$$(3x+1)(x^2+4x)(2x^2-2x-4)=0 \xrightarrow{\text{el producto de dos números es CERO}} \begin{cases} 3x+1=0 \rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \\ x^2+4x=0 \xrightarrow{\text{extraemos factor común}} x(x+4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \\ 2x^2-2x-4=0 \rightarrow 2(x^2-x-2)=0 \rightarrow x^2-x-2=0 \end{cases}$$

$$x^2-x-2=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ x=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

$\{a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-2\}$

$b)\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{3x-10}{5}-\dfrac{x-2}{3}=0$

$$\frac{x-1}{2}-\frac{3x-10}{5}-\frac{x-2}{3}=0 \xrightarrow{\text{reducimos a común denominador}} \frac{15x-15}{30}-\frac{18x-60}{30}-\frac{10x-20}{30}=0 \rightarrow 15x-15-(18x-60)-(10x-20)=0$$

$$15x-15-18x+60-10x+20=0 \rightarrow 15x-18x-10x=15-60-20 \rightarrow -13x=-65 \rightarrow x=\frac{-65}{-13} \rightarrow x=5$$

Ejercicio 6

Dada la ecuación $4x^2+bx+3=0$, halla el valor del parámetro "b" sabiendo que una de sus raíces es $\dfrac{1}{2}$. Calcula la otra raíz.

Solución:

$4x^2+bx++3=0$,

$$si\ x=\frac{1}{2}\ es\ una\ raíz\ de\ la\ ecuación \rightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}+3=0 \rightarrow 4\cdot\frac{1}{4}+\frac{b}{2}+3=0 \rightarrow \frac{b}{2}+4=0 \rightarrow b=-8$$

Ahora tenemos que resolver la ecuación $4x^2-8x+3=0 \rightarrow \{a=4\ ,\ b=-8\ ,\ c=3\}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{8\pm4}{8}=\begin{cases} x=\dfrac{8+4}{8}=\dfrac{12}{8} \\ x=\dfrac{8-4}{8}=\dfrac{4}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 7

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ (x+3)^2+4(x-4)=4$

$(x+3)^2+4(x-4)=4 \quad\rightarrow\quad x^2+6x+9+4x-16=4 \quad\rightarrow\quad x^2+10x-11=0$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=10 \\ c=-11 \end{cases} \rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot(-11)}}{2\cdot 1}=\frac{-10\pm\sqrt{100+44}}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{144}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{-10+12}{2}=1 \ \rightarrow\ x=1 \\ \frac{-10-12}{2}=-11 \ \rightarrow\ x=-11 \end{array}\right.$$

$b)\ (2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$

$(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0 \xrightarrow{\text{extraemos factor común}} (2x+3)(x-4+x-6)=0 \quad\rightarrow\quad (2x+3)(2x-10)=0$

$$\xrightarrow{\text{el producto de dos números es CERO}} \begin{cases} 2x+3=0 \\ 2x-10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x=-3 \ \rightarrow\ x=-\frac{3}{2} \\ 2x=10 \ \rightarrow\ x=5 \end{cases}$$

Ejercicio 8

Tres segmentos miden, respectivamente, 2, 16 y 20 cm. Si a los tres les añadimos una misma longitud, el triángulo construido con ellos es rectángulo. Halla dicha longitud.

Solución:

Llamamos x a la longitud que añadimos $\rightarrow$ la hipotenusa medirá $(x+20)$ y los catetos medirán $(x+16)$ y $(x+2)$.

Teorema de Pitágoras $\rightarrow\ (x+16)^2+(x+2)^2=(x+20)^2 \quad\rightarrow\quad x^2+32x+256+x^2+4x+4=x^2+40x+400$

$2x^2+36x+260=x^2+40x+400 \quad\rightarrow\quad x^2-4x-140=0$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-140 \end{cases} \rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-140)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{4\pm 24}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{4+24}{2}=14 \\ \frac{4-24}{2}=\cancel{-10}\ \ (\text{es una longitud}) \end{array}\right.$$

Si $x=14\ cm$ $\rightarrow$ el triángulo de lados $16\,cm$, $30\,cm$ y $34\,cm$ será rectángulo.

Ejercicio 9

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\quad x^2\left(x^2+5x\right)\left(3x^3-3\right)=0$

$$x^2\left(x^2+5x\right)\left(3x^3-3\right)=0 \xrightarrow{\text{Las opciones son}} \begin{cases} x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ x^2+5x=0 \;\rightarrow\; x(x+5)=0 \;\left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x+5=0 \;\rightarrow\; x=-5 \end{array}\right. \\ 3x^3-3=0 \;\rightarrow\; 3\left(x^3-1\right)=0 \;\rightarrow\; x^3-1=0 \;\rightarrow\; x^3=1 \;\rightarrow\; x=\sqrt[3]{1} \;\rightarrow\; x=1 \end{cases}$$

$b)\quad \left(x^2-3\right)^2-(5-x)=x(1-x) \quad\rightarrow\quad x^4-6x^2+9-5+x=x-x^2 \quad\rightarrow\quad x^4-5x^2+4=0\;\;(\textit{ecuación bicuadrada})$

Hacemos el cambio $x^2=z \;\rightarrow\; x^4=z^2$; *la ecuación nos queda*: $z^2-5z+4=0$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{5+3}{2}=4 \;\rightarrow\; z=4 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ \dfrac{5-3}{2}=1 \;\rightarrow\; z=1 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ejercicio 10

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\quad 2x^3-5x^2-4x+3=0 \xrightarrow{\text{Factorizamos el polinomio por Ruffini}}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \underline{|0} \\ 3 & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & \underline{|0} & \end{array}$$

Entonces $2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(x-3)(2x-1)$

$$2x^3-5x^2-4x+3=0 \;\rightarrow\; (x+1)(x-3)(2x-1)=0 \xrightarrow{\text{las opciones son:}} \begin{cases} x+1=0 \;\rightarrow\; x=-1 \\ 2x-1=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \\ x-3=0 \;\rightarrow\; x=3 \end{cases}$$

$b)\quad \dfrac{(2x+1)^2}{3}-\dfrac{(1-x)^2}{2}=\dfrac{1}{2}+x \quad\rightarrow\quad \dfrac{2(2x+1)^2}{6}-\dfrac{3(1-x)^2}{6}=\dfrac{3}{6}+\dfrac{6x}{6}$

$$2(2x+1)^2-3(1-x)^2=3+6x$$

$$2\left(4x^2+4x+1\right)-3\left(1-2x+x^2\right)=3+6x$$

$$8x^2+8x+2-3+6x-3x^2-3-6x=0$$

$$5x^2+8x-4=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot5\cdot(-4)}}{2\cdot5}=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{10}=\frac{-8\pm12}{10}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-8+12}{10}=\dfrac{4}{10} \;\rightarrow\; x=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{-8-12}{10}=-2 \;\rightarrow\; x=-2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 11

Resuelve la ecuación $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$, y escribe otra que tenga por raíces los opuestos de las raíces de la ecuación dada.

Solución:

$$\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{quitamos denominadores}}\frac{5\cdot 2(x+3)}{2(x+2)(x+3)}+\frac{2x(x+2)}{2(x+2)(x+3)}=\frac{3(x+2)(x+3)}{2(x+2)(x+3)}$$

$$\begin{aligned}&10(x+3)+2x(x+2)=3(x+2)(x+3)\\&10x+30+2x^2+4x=3\left(x^2+5x+6\right)\\&2x^2+14x+30=3x^2+15x+18\\&0=x^2+x-12\end{aligned}$$

$$\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-12\end{cases}\rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\left\langle\begin{matrix}\dfrac{-1+7}{2}=3\\[2mm]\dfrac{-1-7}{2}=-4\end{matrix}\right.\ \rightarrow\ \textit{soluciones}:\begin{cases}x=3\\x=-4\end{cases}$$

Ahora, buscamos una ecuación cuyas soluciones sean opuestas a las obtenidas, es decir $\begin{cases}x=-3\\x=4\end{cases}$

La ecuación pedida será $(x+3)(x-4)=0\ \rightarrow\ x^2-x-12=0$

Ejercicio 12

Dado el polinomio $p(x)=x^3+ax+b$, encuentra los valores de a y b sabiendo que es divisible entre $(x-1)$ y que al dividirlo entre $(x+1)$, el resto es 4.

Solución:

El teorema del resto nos dice que el valor numérico del polinomio $p(x)$ *en el punto* $x=a$, *coincide con el resto de dividir* $p(x)$ *entre* $(x-a)$. *Así, tenemos que:*

$$P(x)=x^3+ax+b\ \textit{ es divisible entre }(x-1)\ \rightarrow\ \underbrace{p(1)}_{\text{valor numérico en } x=1}=\underbrace{0}_{\text{resto de dividir } p(x) \text{ entre } (x-1)}\rightarrow 1^3+a\cdot 1+b=0\ \rightarrow\ a+b=-1$$

$$\textit{Al dividir } P(x) \textit{ entre } (x+1) \textit{ da resto } 4\ \rightarrow\ \underbrace{p(-1)}_{\text{valor numérico en } x=-1}=\underbrace{4}_{\text{resto de dividir } p(x) \text{ entre } (x+1)}\rightarrow(-1)^3+a\cdot(-1)+b=4\ \rightarrow\ -a+b=5$$

$$\textit{Nos queda el sistema}:\begin{cases}\ a+b=-1\\-a+b=5\end{cases}$$

$$2b=4\ \rightarrow\ b=2\ \rightarrow\ a=-1-b\ \rightarrow\ a=-3$$

Ejercicio 13

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ (x-1)(2x-3)-1=2(x+3) \quad \rightarrow \quad 2x^2-3x-2x+3-1=2x+6 \quad \rightarrow \quad 2x^2-7x-4=0$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-7 \\ c=-4 \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{4}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{7+9}{4}=4 \ \rightarrow\ x=4 \\ \frac{7-9}{4}=-\frac{1}{2} \ \rightarrow\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$b)\ \frac{2}{x-1}-3x=\frac{3-x}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{2(x-1)}-\frac{6x(x-1)}{2(x-1)}=\frac{(3-x)(x-1)}{2(x-1)} \quad \rightarrow \quad 4-6x(x-1)=(3-x)(x-1)$

$\rightarrow \quad 4-6x^2+6x=3x-3-x^2+x \quad \rightarrow \quad -5x^2+2x+7=0 \quad \rightarrow \quad 5x^2-2x-7=0$

$$\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-7 \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 5\cdot(-7)}}{2\cdot 5}=\frac{2\pm\sqrt{4+140}}{10}=\frac{2\pm\sqrt{144}}{10}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{2+12}{10}=\frac{7}{5} \ \rightarrow\ x=\frac{7}{5} \\ \frac{2-12}{10}=-1 \ \rightarrow\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ejercicio 14

Francisco tenía 400 €, y se gastó 3/5 de lo que no gastó. ¿Cuántos euros le quedaron?

Solución:

Los euros que le quedaron son los que no gastó, que los llamamos x $\rightarrow$ *Francisco gastó* $\frac{3}{5}$ *de* $x=\frac{3x}{5}$

Como al principio tenía 400 *euros* $\rightarrow$ *lo que gastó + lo que no gastó* $=400$

$\frac{3x}{5}+x=400 \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{5}+\frac{5x}{5}=400 \quad \rightarrow \quad \frac{8x}{5}=400 \quad \rightarrow \quad x=\frac{400\cdot 5}{8}=250$

A Francisco le quedaron 250 *euros y se gastó* 150 *euros que son* $\frac{3}{5}$ *de* 250.

Ejercicio 15

Dada la ecuación $2x^2+bx+72=0$, halla el valor del parámetro "b" para que las dos soluciones sean iguales.

Solución:

Para que una ecuación de 2º grado tenga las dos soluciones iguales, es necesario que el discriminante sea igual a cero.

$b^2-4ac=0 \ \rightarrow$ *en esta ecuación, no conocemos* b *y* $\begin{cases} a=2 \\ c=72 \end{cases} \rightarrow\ b^2-4\cdot 2\cdot 72=0 \ \rightarrow\ b^2-576=0 \ \rightarrow\ b^2=576$

$b=\pm\sqrt{576} \ \rightarrow$ *los posibles valores de* b *son:* $\begin{cases} b=24 \\ b=-24 \end{cases}$

Ejercicio 16

Halla los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que el lado menor tiene 7 cm menos que el mediano y éste 2 cm menos que el mayor.

Solución:

$$\text{Llamamos } x \text{ a la longitud del lado mediano (cateto)} \rightarrow \begin{cases} \text{el lado mayor (hipotenusa) medirá } (x+2) \\ \text{el lado menor (cateto) medirá } (x-7) \end{cases}$$

$$\text{Teorema de Pitágoras} \rightarrow x^2+(x-7)^2=(x+2)^2 \rightarrow x^2+x^2-14x+49=x^2+4x+4$$

$$2x^2-14x+49=x^2+4x+4 \rightarrow x^2-18x+45=0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-18 \\ c=45 \end{cases} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot1\cdot45}}{2\cdot1}=\frac{18\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{18\pm12}{2}=\begin{cases} \frac{18+12}{2}=15 \\ \frac{18-12}{2}=\cancel{3} \quad \text{(el lado menor sería negativo)} \end{cases}$$

Si $x=15\ cm$ $\rightarrow$ los lados del triángulo rectángulo miden $8\,cm$, $15\,cm$ y $17\,cm$.

Ejercicio 17

Cuando dos bombas funcionan a la vez, tardan en agotar un pozo 15 horas. Si actúa sólo una de ella, tarda en agotarlo 16 horas más que si actúa sólo la otra. ¿Cuánto tarda cada una de ellas en agotar el pozo, actuando por separado?

Solución:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Llamamos } x \text{ a las horas que tarda la bomba rápida en agotar el pozo} \rightarrow \text{en 1 hora vacía } \frac{1}{x} \text{ del pozo} \\ \text{Llamamos } x+16 \text{ a las horas que tarda la bomba lenta en agotar el pozo} \rightarrow \text{en 1 hora vacía } \frac{1}{x+16} \text{ del pozo} \\ \text{Entre las dos bombas, vacían el pozo en 15 horas} \rightarrow \text{en 1 hora vacían } \frac{1}{15} \text{ del pozo} \end{array} \right.$$

$$\text{La ecuación nos queda: } \frac{1}{x}+\frac{1}{x+16}=\frac{1}{15} \rightarrow \frac{15(x+16)}{15x(x+16)}+\frac{15x}{15x(x+16)}=\frac{x(x+16)}{15x(x+16)} \rightarrow 15(x+16)+15x=x(x+16)$$

$$15x+240+15x=x^2+16x \rightarrow x^2-14x-240=0 \rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot1\cdot(-240)}}{2\cdot1}=\frac{14\pm\sqrt{1156}}{2}=\begin{cases} \frac{14+34}{2}=24 \\ \frac{14-34}{2}=\cancel{-10} \end{cases}$$

Si $x=24 \rightarrow x+16=40$ Una bomba tarda 24 horas y la otra 40 horas.

Ejercicio 18

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ (5x+3)\cdot(2x^2-x)\cdot(3x^2+5x-8)=0$

$$(5x+3)\cdot(2x^2-x)\cdot(3x^2+5x-8)=0 \xrightarrow{\text{Las opciones son}} \begin{cases} 5x+3=0 \ \rightarrow\ x=-\dfrac{3}{5} \\ 2x^2-x=0 \ \rightarrow\ x(2x-1)=0 \ \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \ \rightarrow\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ 3x^2+5x-8=0 \ \rightarrow\ \left\{x=1\ \ y\ \ x=-\dfrac{8}{3}\right\} \end{cases}$$

$$3x^2+5x-8=0 \ \rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot(-8)}}{2\cdot3}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{-5\pm11}{6}=\begin{cases} x=\dfrac{-5+11}{6}=1 \\ x=\dfrac{-5-11}{6}=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$b)\ (x+1)^2+\frac{4}{x^2}=2(x+3) \ \rightarrow\ \frac{x^2(x+1)^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}=\frac{2x^2(x+3)}{x^2} \ \rightarrow\ x^2(x+1)^2+4=2x^2(x+3)$$

$$x^2(x^2+2x+1)+4=2x^3+6x^2 \ \rightarrow\ x^4+2x^3+x^2+4-2x^3-6x^2=0 \ \rightarrow\ x^4-5x^2+4=0 \quad (\textit{ecuación bicuadrada})$$

$$\textit{Hacemos el cambio } x^2=z \ \rightarrow\ x^4=z^2\ ;\ \textit{la ecuación nos queda}:\ z^2-5z+4=0$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases} \dfrac{5+3}{2}=4 \ \rightarrow\ z=4 \ \rightarrow\ x^2=4 \ \rightarrow\ \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ \dfrac{5-3}{2}=1 \ \rightarrow\ z=1 \ \rightarrow\ x^2=1 \ \rightarrow\ \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 19

a) Escribe una ecuación de tercer grado que tenga soluciones $x_1=-1$, $x_2=4$, $x_3=\dfrac{1}{2}$.

Solución:

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Para que la ecuación tenga la solución } x=-1 \ \rightarrow\ x+1=0 \ \ y \ \ \textit{debe contener el factor} \ (x+1) \\ \textit{Para que la ecuación tenga la solución } x=4 \ \rightarrow\ x-4=0 \ \ y \ \ \textit{debe contener el factor} \ (x-4) \\ \textit{Para que la ecuación tenga la solución } x=\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ x-\dfrac{1}{2}=0 \xrightarrow{\text{multiplicando por 2}} 2x-1=0 \ \ y \ \textit{debe contener el factor} \ (2x-1) \end{array}\right.$$

$$\textit{La ecuación nos queda}:\ (x+1)(x-4)(2x-1)=0 \ \rightarrow\ \textit{si queremos multiplicar, obtenemos la ecuación} \ \ 2x^3-7x^2-5x+4=0$$

b) Escribe una ecuación de segundo grado, en la forma $ax^2+bx+c=0$, que tenga por raíces $x=\dfrac{2}{3}$ y $x=-2$.

Solución:

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Para que la ecuación tenga la solución } x=-2 \;\rightarrow\; x+2=0 \;\; y \;\; \textit{debe contener el factor } (x+2) \\ \textit{Para que la ecuación tenga la solución } x=\dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; x-\dfrac{2}{3}=0 \xrightarrow{\textit{multiplicando por } 3} 3x-2=0 \;\; y \textit{ debe contener el factor } (3x-2) \end{array}\right.$$

$$\textit{La ecuación nos queda}: \;\; (x+2)(3x-2)=0 \xrightarrow{\textit{multiplicando}} \quad 3x^2+4x-4=0$$

Ejercicio 20

Pedro dice: "Si al triple de la edad que tenía hace 15 años, le restas la mitad de la edad que tendré dentro de 6 años, obtendrás mi edad actual. ¿Cuántos años tengo?"
(Plantea y resuelve una ecuación para encontrar la solución al problema.)

Solución:

$$\textit{Llamamos } x \textit{ a la edad actual de Pedro} \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} \textit{Hace } 15 \textit{ años, su edad era } (x-15) \rightarrow \textit{el triple de esa edad } 3(x-15) \\ \textit{Dentro de } 6 \textit{ años, su edad será } (x+6) \rightarrow \textit{la mitad de esa edad } \dfrac{x+6}{2} \end{array}\right.$$

$$\textit{La ecuación nos queda}: \;\; 3(x-15)-\frac{x+6}{2}=x \;\rightarrow\; \frac{6(x-15)}{2}-\frac{x+6}{2}=\frac{2x}{2} \;\rightarrow\; 6(x-15)-(x+6)=2x$$

$$6x-90-x-6=2x$$

$$3x=96 \;\rightarrow\; x=32$$

Pedro tiene 32 años.

Ejercicio 21

Calcula los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm, sabiendo que uno de los catetos es la semisuma de la hipotenusa y del otro cateto.

Solución:

Llamamos x a uno de los catetos

$$\textit{El otro cateto es la semisuma de la hipotenusa y del primer cateto} \;\rightarrow\; \frac{10+x}{2}$$

$$\textit{La hipotenusa mide } 10 \textit{ cm} \xrightarrow{\textit{Por el teorema de Pitágoras}} x^2+\left(\frac{10+x}{2}\right)^2=10^2 \;\rightarrow\; x^2+\frac{(10+x)^2}{4}=100 \;\rightarrow\; 4x^2+(10+x)^2=400$$

$$4x^2+100+20x+x^2=400 \;\rightarrow\; 5x^2+20x-300=0 \xrightarrow{\textit{dividiendo entre } 5} x^2+4x-60=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-60)}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{2}=\left\langle\begin{array}{l} \dfrac{-4+16}{2}=6 \\ \dfrac{-4-16}{2}=\cancel{-10} \;\; \textit{puesto que es una longitud} \end{array}\right.$$

$$\textit{Un cateto mide } 6 \textit{ cm y el otro cateto mide } \frac{10+6}{2}=8 \textit{ cm.}$$