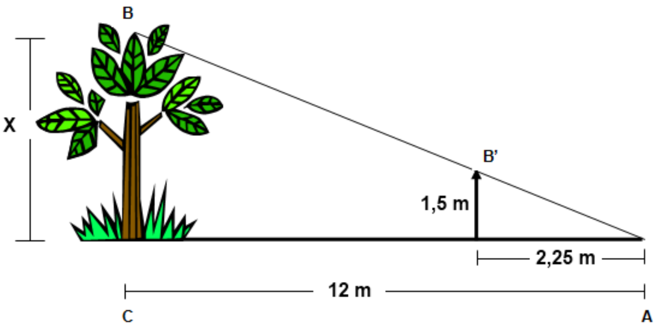
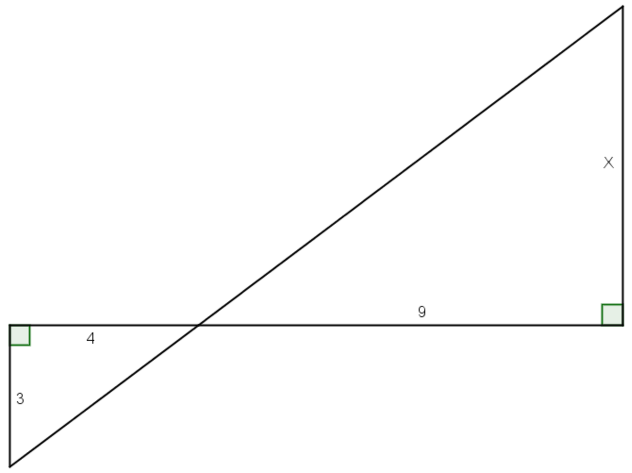
FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS. (Soluciones)

Ejercicio 1

En las siguientes figuras, calcula el valor de x.





Solución:

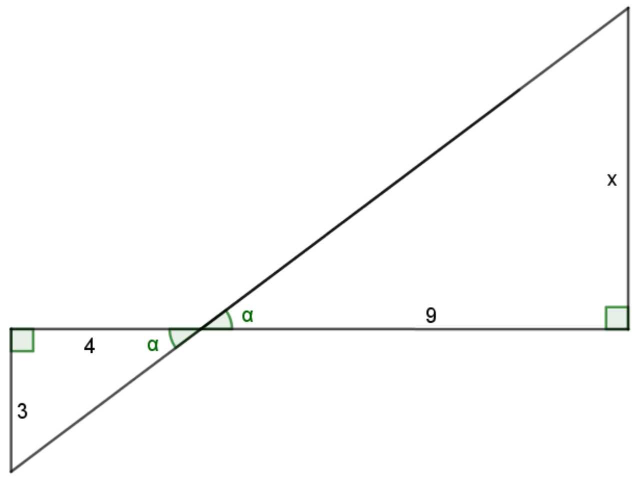
Los dos triángulos rectángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales.

El teorema de Tales nos dice:
El cociente de lados homólogos (ocupan la misma posición) es constante:

$$\frac{x}{1,5}=\frac{12}{2,5} \rightarrow x=\frac{1,5\cdot 12}{2,5}=7,2\ m.$$

También, que si dividimos dos lados en un triángulo da el mismo resultado que si dividimos los mismos lados en el triángulo semejante:

$$\frac{x}{12}=\frac{1,5}{2,5} \rightarrow x=\frac{1,5\cdot 12}{2,5}=7,2\ m.$$



Los dos triángulos rectángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales.

El cociente de lados homólogos es constante:

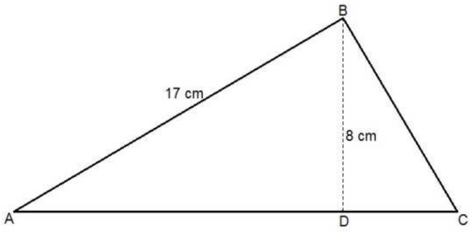
$$\frac{x}{3}=\frac{9}{4} \rightarrow x=\frac{3\cdot 9}{4}=6,75$$

También se cumple esta proporción:

$$\frac{x}{9}=\frac{3}{4} \rightarrow x=\frac{9\cdot 3}{4}=6,75$$

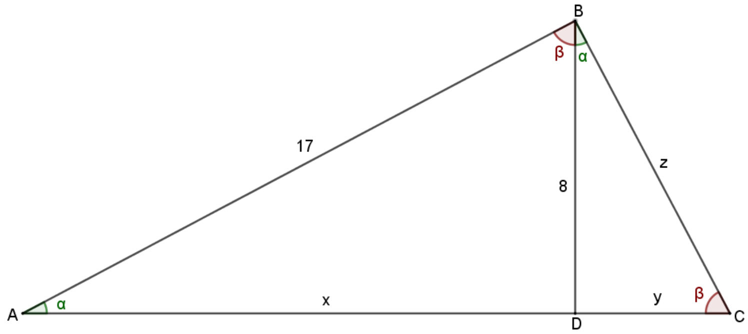
Ejercicio 2

El triángulo ABC es rectángulo. Si BD es una altura de ese triángulo y hemos tomado las medidas:
AB = 17 cm y BD = 8 cm. Usando el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos, calcula el área y el perímetro del triángulo ABC.

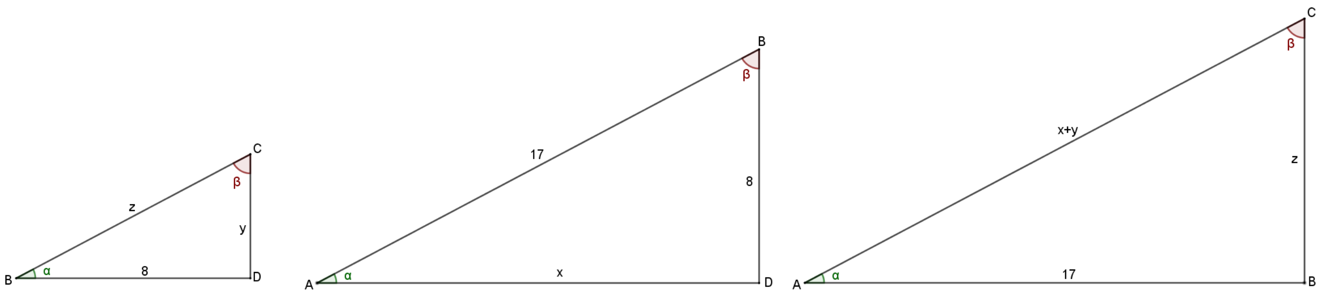


Solución:

Como el triángulo ABC es rectángulo $\Rightarrow$ *los triángulos ABC, ADB y BDC son semejantes, como se puede apreciar en el siguiente dibujo, ya que los ángulos* α *y* β *son complementarios* $\left(\alpha+\beta=90^\circ\right) \rightarrow$ *los tres triángulos tienen ángulos iguales.*



Colocamos los triángulos ABC, ADB y BDC en la misma posición y marcamos los lados y los ángulos para evitar confusiones:



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo que está en el centro, tenemos:

$$x^2+8^2=17^2 \quad \rightarrow \quad x^2+64=289 \quad \rightarrow \quad x^2=225 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{225}=15$$

Ahora, según el teorema de Thales, si dividimos dos lados en uno de los triángulos, obtenemos el mismo resultado que si dividimos los mismos lados en otro triángulo demejante $\rightarrow$ *tenemos las siguientes proporciones:*

$$\frac{y}{8}=\frac{8}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{8}=\frac{8}{15} \quad \rightarrow \quad y=\frac{8\cdot 8}{15}\simeq 4,27$$

$$\frac{z}{8}=\frac{17}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{z}{8}=\frac{17}{15} \quad \rightarrow \quad z=\frac{8\cdot 17}{15}\simeq 9,07$$

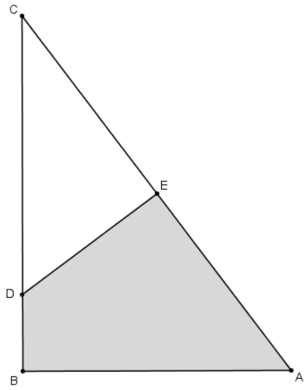
En el triángulo ABC, una base mide $x+y=15+4,27=19,27\ cm$ *y su altura correspondiente, 8 cm.*

Entonces el área del triángulo valdrá: $A=\dfrac{19,27\cdot 8}{2}=77,08\ cm^2$

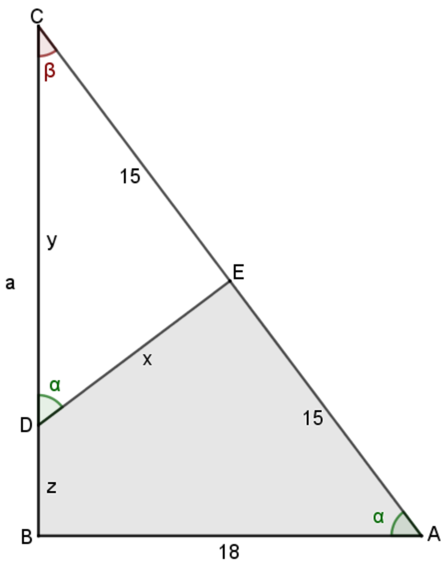
El perímetro será: $P=x+y+z+17 \quad \rightarrow \quad P=45,34\ cm.$

Ejercicio 3

El triángulo ABC es rectángulo. E es el punto medio del lado AC y el segmento DE es perpendicular al segmento AC. Calcula el área del cuadrilátero ABDE, sabiendo que AC=30 cm y AB=18 cm.



Solución:



Calcularemos el área del cuadrilátero ABDE como la diferencia entre las áreas de los dos triángulos rectángulos de la figura:

$$A_{cuadrilátero} = A_{triángulo\ ABC} - A_{triángulo\ DEC} = \frac{18 \cdot a}{2} - \frac{x \cdot 15}{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, tenemos:

$$a^2 + 18^2 = 30^2 \quad \rightarrow \quad a^2 + 324 = 900 \quad \rightarrow \quad a^2 = 576 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{576} = 24\ cm$$

El triángulo ABC es rectángulo y, por la contrucción de la figura, vemos que es semejante al triángulo DEC, ya que tienen ángulos iguales $(\alpha + \beta = 90^\circ)$.

Según el teorema de Tales, se cumple la proporción:

$$\frac{a}{18} = \frac{15}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{24}{18} = \frac{15}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{18 \cdot 15}{24} = 11,25\ cm$$

$$A_{cuadrilátero} = \frac{18 \cdot 24}{2} - \frac{11,25 \cdot 15}{2} = 216 - 84,375 = 131,625\ cm^2$$

Aunque no se pide, podríamos calcular el perímetro del cuadrilátero fácilmente.

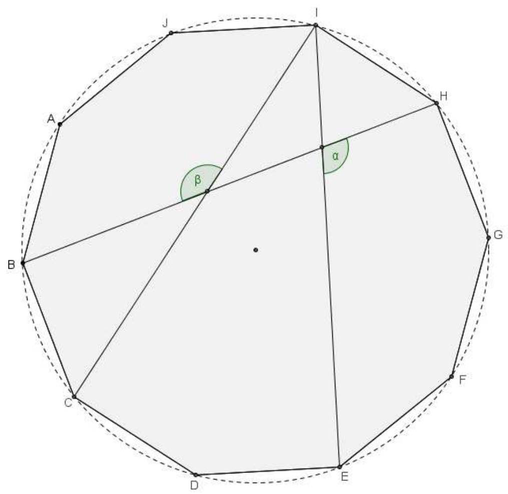
Tanto por el teorema de Pitágoras, como por el teorema de Tales, podemos encontrar el valor de y:

$$\frac{y}{15} = \frac{30}{24} \quad \rightarrow \quad y = \frac{15 \cdot 30}{24} = 18,75\ cm \quad ; \quad entonces\ \ z = a - y \quad \rightarrow \quad z = 24 - 18,75 = 5,25\ cm$$

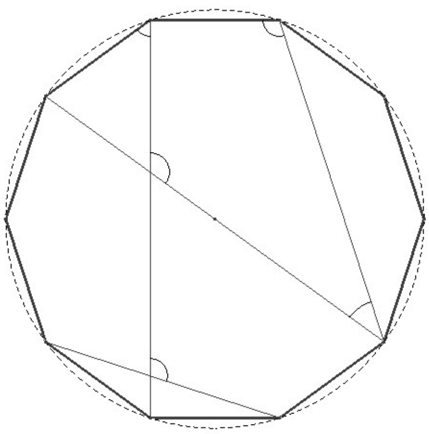
$$P_{cuadrilátero} = 18 + 15 + x + z = 18 + 15 + 11,25 + 5,25 = 49,5\ cm.$$

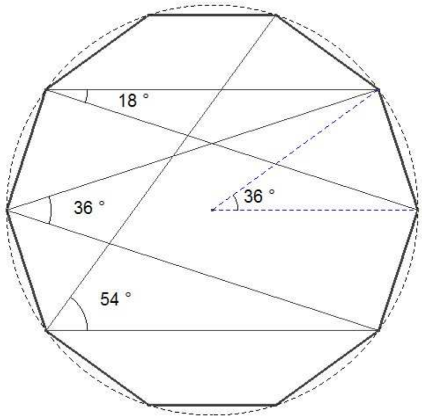
Ejercicio 4

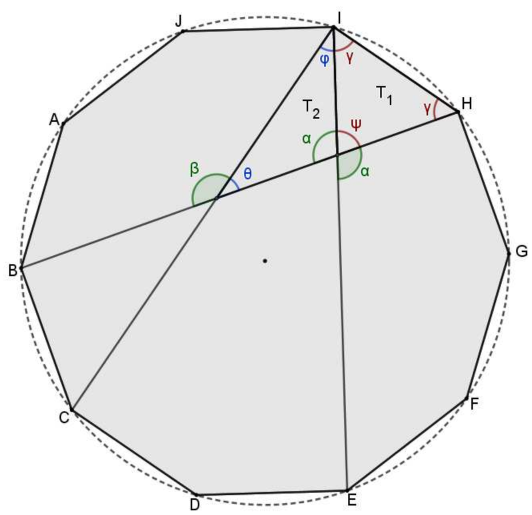
En el siguiente decágono regular, calcula el valor de los ángulos α y β.



Solución:







En un decágono regular, el ángulo central que abarca un lado mide $\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$

Un ángulo inscrito que abarca un lado medirá $\frac{36^\circ}{2}=18^\circ \Rightarrow$ *un ángulo inscrito que abarca n lados medirá* $n\cdot 18^\circ \ (n\le 8)$.

En el triángulo T_1 *tenemos:*

El ángulo γ *abarca tres lados (tres arcos)* $\Rightarrow \quad \gamma=3\cdot 18^\circ \quad \Rightarrow \quad \gamma=54^\circ$

El ángulo $\psi=180^\circ-2\gamma$ *, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow \quad \psi=72^\circ$

El ángulo $\alpha=180^\circ-\psi \quad \Rightarrow \quad \alpha=108^\circ$

En el triángulo T_2 *tenemos:*

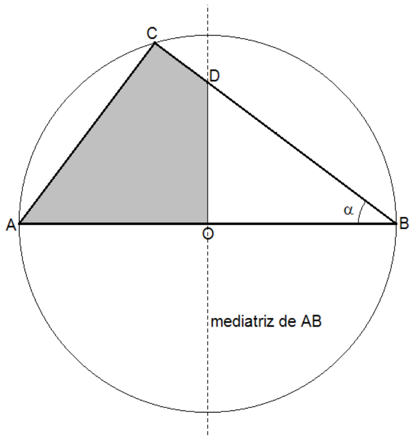
El ángulo φ *abarca dos lados (dos arcos)* $\Rightarrow \quad \varphi=2\cdot 18^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi=36^\circ$

El ángulo $\theta=180^\circ-\alpha-\varphi$*, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow \theta=36^\circ=\varphi$

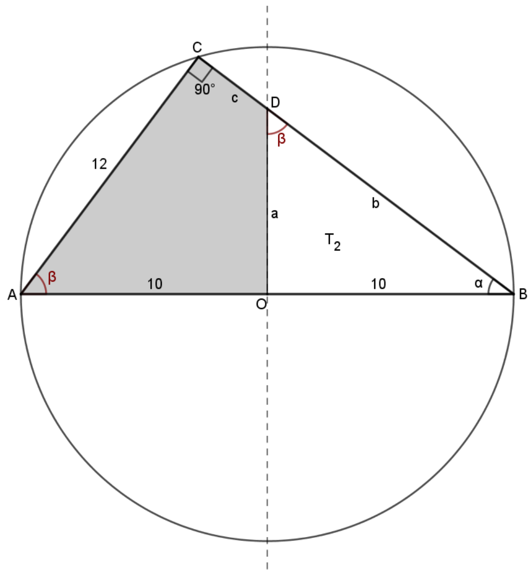
El ángulo $\beta=180^\circ-\theta \quad \Rightarrow \quad \beta=144^\circ$

Ejercicio 5

El triángulo ABC es rectángulo por estar inscrito en una circunferencia, siendo el lado AB un diámetro. Si la circunferencia tiene radio 10 cm, el lado AC=12 cm y OD está en la mediatriz del lado AB, calcula el área y el perímetro del cuadrilátero sombreado AODC.



Solución:



El triángulo ABC es rectángulo, con ángulos agudos α *y* β. *De este triángulo conocemos la hipotenusa* $AB = 20\ cm$ *y un cateto* $AC = 12\ cm$ $\rightarrow$ *por el teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor del cateto BC.*

$$(BC)^2 + 12^2 = 20^2 \quad \rightarrow \quad (BC)^2 + 144 = 400 \quad \rightarrow \quad (BC)^2 = 256 \quad \rightarrow \quad BC = \sqrt{256} = 16\ cm.$$

El triángulo T_2 *es rectángulo puesto que uno de sus lados está en la mediatriz del segmento AB. El ángulo* α *es común para los triángulos* ABC *y* T_2 $\rightarrow$ *el tercer ángulo de* T_2 *debe ser* β. $\rightarrow$ ABC *y* T_2 *son triángulos semejantes.*

$$\text{Aplicando el teorema de Tales:} \begin{cases} \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{CA}{CB} \quad \rightarrow \quad \dfrac{a}{10} = \dfrac{12}{16} \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{10 \cdot 12}{16} = 7,5\ cm \\ \dfrac{DB}{OB} = \dfrac{AB}{CB} \quad \rightarrow \quad \dfrac{b}{10} = \dfrac{20}{16} \quad \rightarrow \quad b = \dfrac{10 \cdot 20}{16} = 12,5\ cm \end{cases}$$

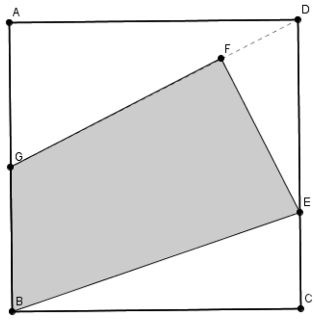
Ya conocemos todos los valores necesarios para calcular lo que nos piden:

$$A_{cuadrilátero} = A_{triángulo\ ABC} - A_{triángulo\ T_2} \quad \rightarrow \quad A_{cuadrilátero} = \frac{16 \cdot 12}{2} - \frac{10 \cdot 7,5}{2} = 96 - 37,5 = 58,5\ cm^2$$

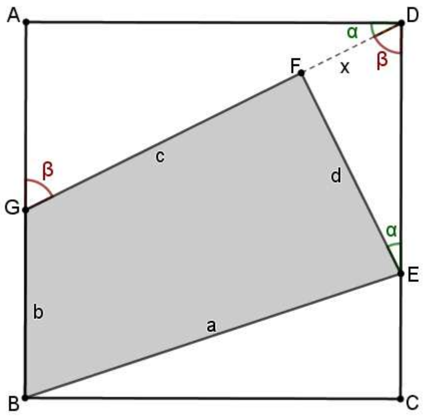
$$P_{cuadrilátero} = a + c + 12 + 10 = 7,5 + 3,5 + 12 + 10 = 33\ cm \qquad (c = CB - b = 16 - 12,5 = 3,5\ cm)$$

Ejercicio 6

El cuadrado ABCD tiene lado 6 cm. G es el punto medio del lado AB y el segmento CE mide la mitad del segmento ED. El segmento EF es perpendicular al segmento GD. Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero BEFG.



Solución:



Los triángulos ADG y FED son rectángulos y semejantes, puesto que α y β son ángulos complementarios.

En el triángulo ADG, conocemos $AD = 6\ cm$ y $AG = 3\ cm$ $\rightarrow$ por el teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor de la hipotenusa DG.

$$(DG)^2 = 6^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad (DG)^2 = 36 + 9 \quad \rightarrow \quad (DG)^2 = 45 \quad \rightarrow \quad DG = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm.$$

Como el segmento CE mide la mitad del segmento ED $\rightarrow$ $CE = 2\ cm$ y $ED = 4\ cm$.
ADG y FED son triángulos semejantes.

$$\text{Aplicando el teorema de Tales:} \begin{cases} \dfrac{AG}{DG} = \dfrac{FD}{ED} & \rightarrow \quad \dfrac{3}{3\sqrt{5}} = \dfrac{x}{4} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{3 \cdot 4}{3\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}\ cm \\ \dfrac{DA}{DG} = \dfrac{EF}{ED} & \rightarrow \quad \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{d}{4} \quad \rightarrow \quad d = \dfrac{6 \cdot 4}{3\sqrt{5}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}\ cm \end{cases}$$

$$A_{cuadrilátero} = A_{cuadrado} - A_{triángulo\ ADG} - A_{triángulo\ FED} - A_{triángulo\ CBE}$$

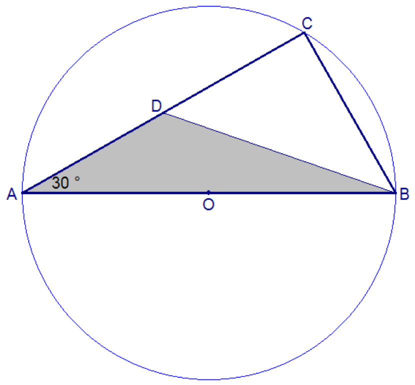
$$A_{cuadrilátero} = 6^2 - \frac{6 \cdot 3}{2} - \frac{\frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}}{2} - \frac{6 \cdot 2}{2} = 36 - 9 - \frac{16}{5} - 6 = 17{,}8\ cm^2$$

$$a^2 = 6^2 + 2^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 40 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ cm \quad ; \quad c = DG - x = 3\sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

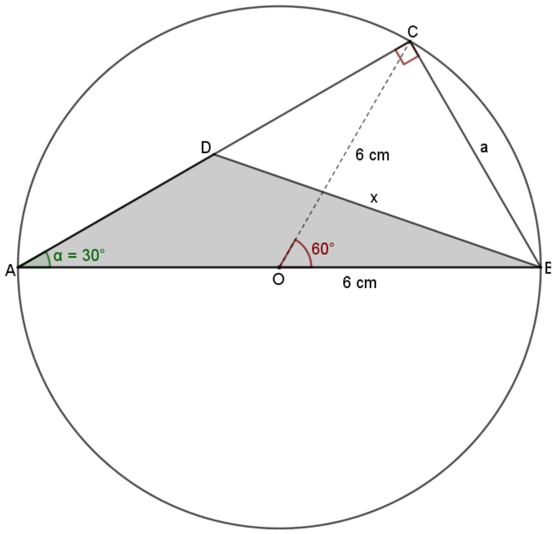
$$P_{cuadrilátero} = a + b + c + d = 2\sqrt{10} + 3 + \frac{11}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} \simeq 17{,}82\ cm$$

Ejercicio 7

Dado el triángulo ABC, inscrito en una circunferencia de radio 6 cm y centro O, tenemos que D es el punto medio del lado AC y el ángulo CÂB=30º. Se pide el área y el perímetro del triángulo ABD.



Solución:



Tenemos un ángulo inscrito de $30^\circ \Rightarrow$ *el ángulo central correspondiente será de* 60°.

El triángulo OBC es isósceles y con un ángulo de $60^\circ \Rightarrow$ *es equilátero* $\Rightarrow \quad a = R = 6\ cm.$

El triángulo ABC es rectángulo con $\overline{AB} = 12\ cm$ *y* $\overline{BC} = 6\ cm \Rightarrow$ *por el teorema de Pitágoras:*

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 \;\rightarrow\; 12^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + 6^2 \;\rightarrow\; \left(\overline{AC}\right)^2 = 108 \;\rightarrow\; \overline{AC} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ cm$$

El área del triángulo ABC será: $A_{ABC} = \dfrac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}\ cm^2$

$\overline{OC}$ *y* $\overline{BD}$ *son segmentos de mediana del triángulo ABC. Una mediana de un triángulo lo divide en dos triángulos de igual área* $\Rightarrow$ *los triángulos OBC, ABD y BCD tienen el mismo área que es la mitad del área del triángulo ABC.*

$$A_{ABD} = \frac{A_{ABC}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A_{ABD} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

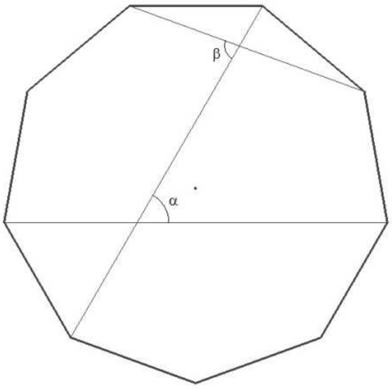
El triángulo BCD es rectángulo con $\overline{BC} = 6\ cm$ *y* $\overline{CD} = \dfrac{\overline{AC}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm \Rightarrow$ *por Pitágoras:*

$$x^2 = \left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{CD}\right)^2 \;\rightarrow\; x^2 = 6^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \;\rightarrow\; x^2 = 63 \;\rightarrow\; x = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}\ cm$$

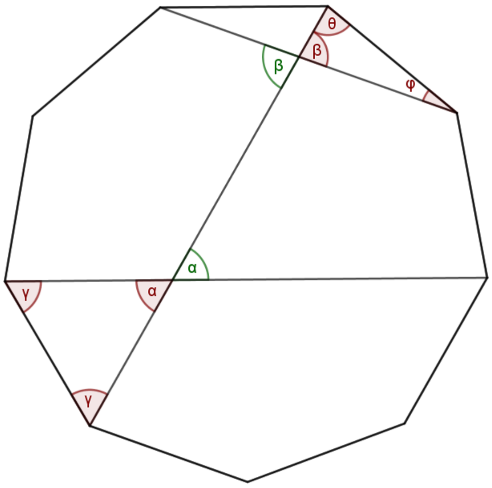
El perímetro del triángulo ABD será: $P_{ABD} = 6 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{7} \quad \rightarrow \quad P_{ABD} = 3 \cdot \left(2 + \sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\ cm$

Ejercicio 8

En el siguiente eneágono regular hemos trazado algunas diagonales. Calcula el valor de los dos ángulos marcados.



Solución:



En un eneáogono regular, el ángulo central que abarca un lado mide $\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$

Un ángulo inscrito que abarca un lado medirá $\frac{40^\circ}{2}=20^\circ \Rightarrow$ *un ángulo inscrito que abarca n lados medirá* $n\cdot 20^\circ \; (n\leq 7)$.

Recordamos que ángulos opuestos por el vértice son iguales $\rightarrow$ *los nombramos igu*

El ángulo γ *abarca tres lados (tres arcos)* $\Rightarrow \gamma=3\cdot 20^\circ \Rightarrow \gamma=60^\circ$

El ángulo $\alpha=180^\circ-2\gamma \Rightarrow \alpha=180^\circ-120^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ$

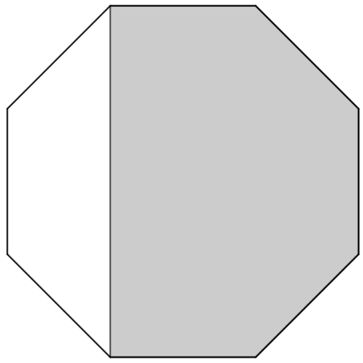
El ángulo φ *abarca un lado (un arco)* $\Rightarrow \varphi=20^\circ$

El ángulo θ *abarca cuatro lados (cuatro ar cos)* $\Rightarrow \theta=4\cdot 20^\circ \Rightarrow \theta=80^\circ$

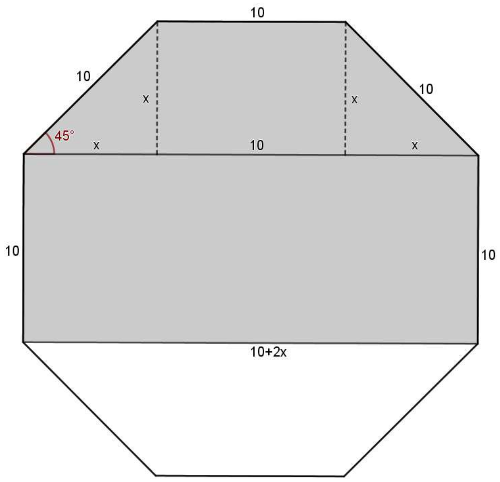
El ángulo $\beta=180^\circ-\varphi-\theta$ *, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow \beta=80^\circ$

Ejercicio 9

Dado un octógono regular de lado 10 cm, trazamos una de sus diagonales. Calcula el área de la parte sombreada.



Solución:



Giramos el octógono regular para ver mejor que el hexágono sombreado está formado por un rectángulo y un trapecio isósceles.

Analizando los ángulos en el octógono, vemos que los triángulos rectángulos del trapecio son isósceles $\rightarrow$ *tienen los dos catetos iguales, de longitud x.*

Por el teorema de Pitágoras: $x^2+x^2=10^2 \;\rightarrow\; 2x^2=100 \;\rightarrow\; x^2=50$

$x=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\ cm$

El área del hexágono sombreado será la suma de las áreas del rectángulo y del trapecio:

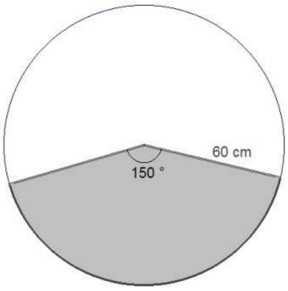
$$A_{hexágono}=A_{rectángulo}+A_{trapecio}=(10+2x)\cdot 10+\frac{\left[(10+2x)+10\right]\cdot x}{2}$$

$$A_{hexágono}=\left(10+10\sqrt{2}\right)\cdot 10+\frac{\left[20+10\sqrt{2}\right]\cdot 5\sqrt{2}}{2}=100+100\sqrt{2}+50\sqrt{2}+50$$

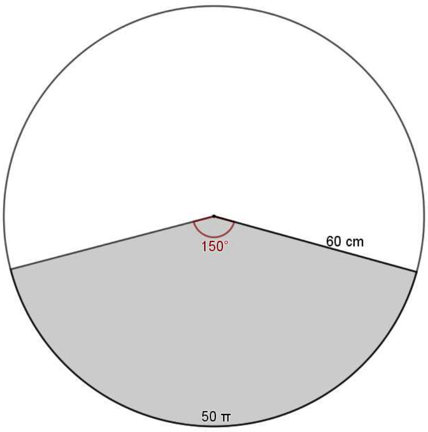
$$A_{hexágono}=150+150\sqrt{2}=150\left(1+\sqrt{2}\right) \quad\rightarrow\quad A_{hexágono}=150\left(1+\sqrt{2}\right)\ cm^2$$

Ejercicio 10

De un disco de chapa de 60 cm de radio, cortamos un sector circular de 150º de amplitud para construir un vaso cónico. Calcula, en litros, la capacidad de dicho vaso.



Solución:



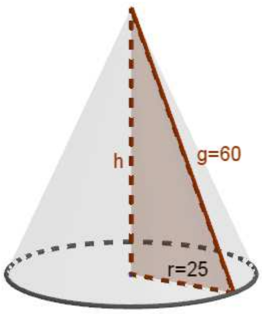
La longitud de arco del sector circular es proporcional a la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{150^\circ} = \frac{2\cdot\pi\cdot 60}{360^\circ} \quad \rightarrow \quad l = \frac{2\cdot\pi\cdot 60\cdot 150^\circ}{360^\circ} = 50\pi \ cm$$

Esa longitud, enrollada, es la que va a formar la circunferencia de la base del cono. Si esa circunferencia tiene radio r $\rightarrow \quad 2\pi r = 50\pi \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{50\pi}{2\pi} \quad \rightarrow \quad r = 25 \ cm$

El radio del disco de chapa coincide con la generatriz del cono, aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, encontraremos la altura, h, del cono:

$$h^2 + 25^2 = 60^2 \quad \rightarrow \quad h^2 + 625 = 3600 \quad \rightarrow \quad h^2 = 3600 - 625 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{2975} \simeq 54,54 \ cm$$



Ahora tenemos todos los datos necesarios para calcular el volumen del cono:

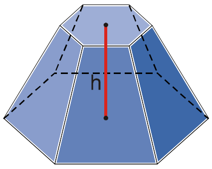
$$V_{cono} = \frac{A_{base} \times altura}{3} = \frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3} = \frac{\pi\cdot 25^2\cdot 54,54}{3} \quad \rightarrow \quad V_{cono} = 35698,7 \ cm^3$$

Como nos piden la capacidad en litros $\rightarrow \quad 35698,7 \ cm^3 = 35,6987 \ dm^3$

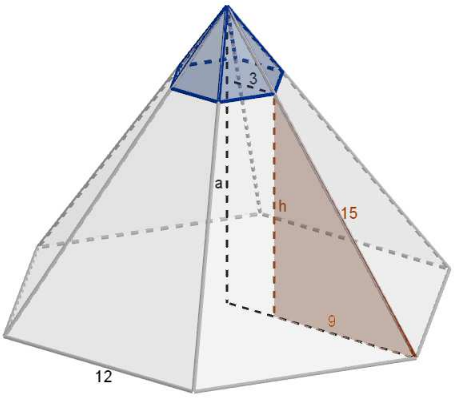
La capacidad del vaso cónico será, aproximadamente, de 35,7 litros.

Ejercicio 11

Calcula el volumen y la superficie total de un tronco de pirámide de bases hexágonos regulares y medidas: Arista de la base mayor 12 cm, arista de la base menor 3 cm, arista lateral 15 cm.



Solución:



Para calcular el volumen del tronco de pirámide, hallaremos el volumen de la pirámide completa y le restaremos el volumen de la pirámide que falta (en el dibujo lateral, la pirámide azul).

Necesitamos calcular la altura de ambas pirámides, para ello aplicaremos Los teoremas de Pitágoras y Tales.

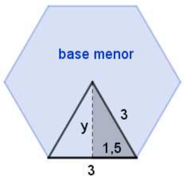
En el triángulo rectángulo sombreado, interior a la pirámide, calculamos la altura del tronco, h:

$$h^2+9^2=15^2 \quad\rightarrow\quad h^2+81=225 \quad\rightarrow\quad h^2=225-81 \quad\rightarrow\quad h=\sqrt{144}=12\ cm$$

Ahora, por semejanza, hallamos la altura de la pirámide completa, a:

$$\frac{a}{12}=\frac{12}{9} \quad\rightarrow\quad a=\frac{12\cdot 12}{9} \quad\rightarrow\quad a=16\ cm$$

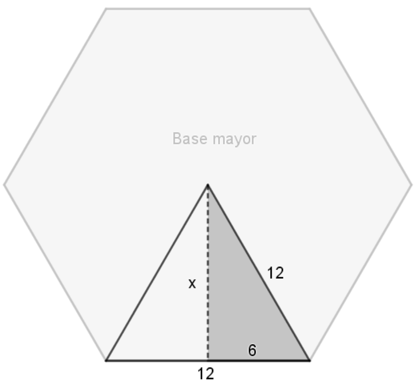
Entonces, la altura de la pirámide azul será $a'=a-h=16-12 \quad\rightarrow\quad a'=4\ cm$



Tenemos que calcular el área de las dos bases del tronco de pirámide, que son hexágonos regulares. Cada hexágono lo dividimos en 6 triángulos equiláteros. Calculamos el área de esos triángulos.

$$y^2+1,5^2=3^2 \quad\rightarrow\quad y=\sqrt{9-2,25}\simeq 2,6\ cm \quad\rightarrow\quad A_{base\ menor}=6\cdot A_{triángulo}=6\cdot\frac{3\cdot 2,6}{2}=23,4\ cm^2$$

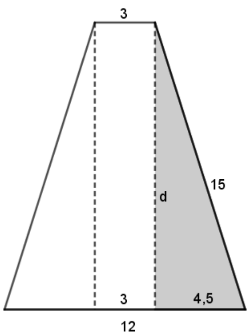
$$x^2+6^2=12^2 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt{144-36}\simeq 10,39\ cm \quad\rightarrow\quad A_{Base\ mayor}=6\cdot A_{triángulo}=6\cdot\frac{12\cdot 10,39}{2}=374,04\ cm^2$$



$$V_{tronco}=V_{pirámide\ grande}-V_{pirámide\ pequeña}=\frac{1}{3}\cdot 374,04\cdot 16-\frac{1}{3}\cdot 23,4\cdot 4=1963,68\ cm^3$$

Para la superficie exterior sumaremos el área de las dos bases y las 6 caras laterales que son trapecios isósceles.

Calculamos d, altura del trapecio: $d^2+4,5^2=15^2 \quad\rightarrow\quad d=\sqrt{15^2-4,5^2}=14,31\ cm$

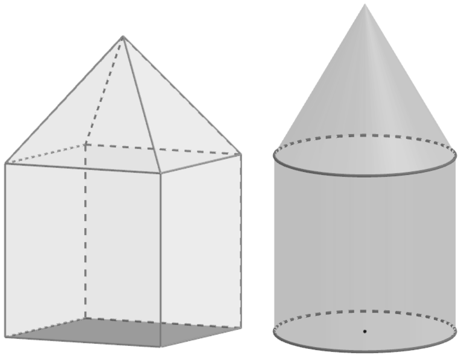


$$A_{trapecio}=\frac{(12+3)\cdot 14,31}{2}=107,325\ cm^2$$

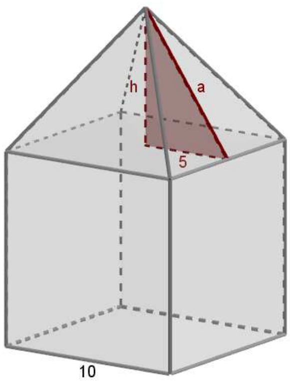
$$A_{total}=A_{Base\ mayor}+A_{base\ menor}+6\cdot A_{trapecio}=374,04+23,4+6\cdot 107,325=1041,39\ cm^2$$

Ejercicio 12

De las siguientes figuras, una tiene todas sus aristas iguales de 10 dm de longitud y la otra, tiene generatrices y diámetro de la base iguales, también de 10 dm. Compara sus volúmenes y sus superficies exteriores.



Solución:



La primera figura está formada por un cubo y una pirámide de base cuadrada.

$V_{figura1} = V_{cubo} + V_{pirámide}$

Tenemos que calcular la altura, h, de la pirámide. Para ello, hallamos la altura del triángulo equilátero, de lado 10 dm, de una de sus caras laterales:

$a^2 + 5^2 = 10^2 \;\rightarrow\; a^2 + 25 = 100 \;\rightarrow\; a^2 = 75 \;\rightarrow\; a = \sqrt{75} = 8,66\ dm$

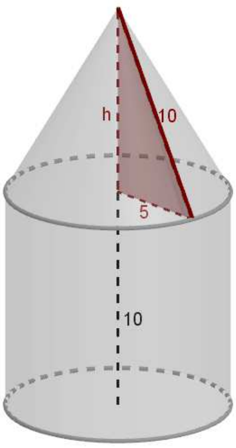
Ahora, h es un cateto del triángulo rectángulo sombreado en la pirámide:

$h^2 + 5^2 = a^2 \;\rightarrow\; h^2 + 25 = 75 \;\rightarrow\; h^2 = 50 \;\rightarrow\; h = \sqrt{50} = 7,07\ dm$

$$V_{figura1} = V_{cubo} + V_{pirámide} = 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7,07 \;\rightarrow\; V_{figura1} = 1235,67\ dm^3$$

La superficie exterior de la figura1 está formada por 5 cuadrados de lado 10 dm y 4 triángulos equiláteros de lado 10 dm.

$$S_{figura1} = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 8,66}{2} \;\rightarrow\; S_{figura1} = 673,2\ dm^2$$



La segunda figura está formada por un cilindro y un cono.

$V_{figura2} = V_{cilindro} + V_{cono}$

Tenemos que calcular la altura, h, del cono. Para ello, utiliamos el teorema de Pitágoras, puesto que h es un cateto del triángulo rectángulo sombreado en el cono:

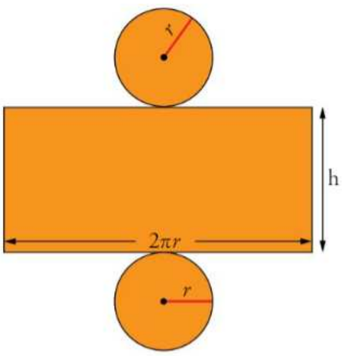
$h^2 + 5^2 = g^2 \;\rightarrow\; h^2 + 25 = 100 \;\rightarrow\; h^2 = 75 \;\rightarrow\; h = \sqrt{75} = 8,66\ dm$

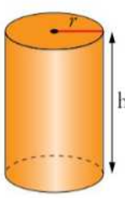
$$V_{figura2} = V_{cilindro} + V_{cono} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8,66 \;\rightarrow\; V_{figura2} = 1012,12\ dm^3$$

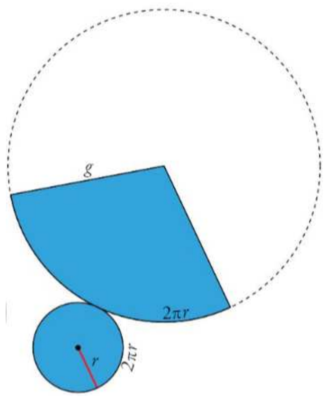
La superficie exterior de la figura2 está formada por un círculo de radio 5 dm, El área lateral del cilindro que es un rectángulo y el área lateral del cono que es un sector circular.

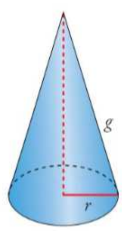
$$S_{figura1} = A_{círculo} + A_{rectángulo} + A_{sector} = \pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10 + \pi \cdot 5 \cdot 10 = 175\pi \;\rightarrow\; S_{figura2} = 549,78\ dm^2$$

La primera figura tiene mayor volumen y mayor superficie que la segunda figura.



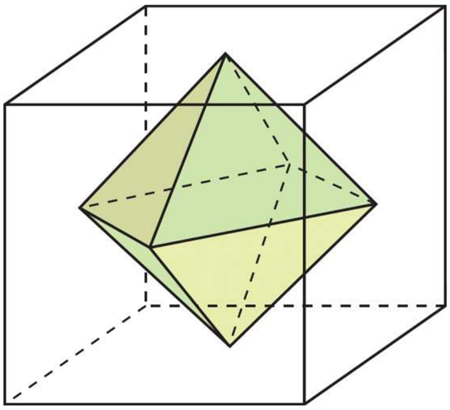




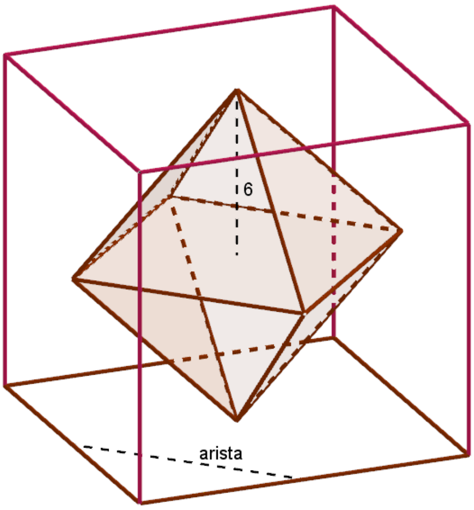


Ejercicio 13

En un cubo de 12 cm de arista introducimos un octaedro de forma que los vértices de este se apoyen en los puntos medios de las caras del cubo. Calcula el volumen y la superficie exterior de dicho octaedro.



Solución:



La arista del octaedro es el segmento que une los puntos medios de dos caras consecutivas. Esa longitud coincide con el segmento que une los puntos medios de los lados de una de las caras del cubo.

$$a^2 = 6^2 + 6^2 \to a^2 = 72 \quad \to \quad a = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 6\sqrt{2}\ cm$$

Para calcular el volumen del octaedro, lo consideramos como dos pirámides unidas por su base. La altura de una de esas pirámides es la mitad de la arista del cubo.

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144\ cm^3$$

$$V_{octaedro} = 2 \cdot V_{pirámide} = 288\ cm^3$$

Para la superficie exterior, calculamos el área de una cara $\left(\textit{triángulo equilátero de lado } a = 6\sqrt{2}\right)$ *y la multiplicamos por 8. Llamamos x a la altura de una de esas caras:*

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \to \quad x^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \quad \to \quad a^2 + 18 = 72 \to a = \sqrt{54} \simeq 7{,}35\ cm$$

$$A_{cara} = \frac{\sqrt{72} \cdot \sqrt{54}}{2} \simeq 31{,}18\ cm^2 \quad \to \quad S_{octaedro} = 8 \cdot A_{cara} = 249{,}4\ cm^2$$