SOLUCIONES . SUCESIONES DE NÚMEROS REALES.

Ejercicio nº 1.-

Calcula los términos a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_{10} , en las siguientes sucesiones:

$a)\quad a_n = \dfrac{n+4}{2n-1} \quad\rightarrow\quad a_1 = 5\ ,\ a_2 = 2\ ,\ a_3 = \dfrac{7}{5}\ ,\ a_4 = \dfrac{8}{7}\ ,\ a_5 = 1\ ,\ a_{10} = \dfrac{14}{19}$

$b)\quad a_n = (-1)^{n-1}\cdot(5-2n) \quad\rightarrow\quad a_1 = 5\ ,\ a_2 = -1\ ,\ a_3 = -1\ ,\ a_4 = 3\ ,\ a_5 = -5\ ,\ a_{10} = 15$

$c)\quad a_n = n^2 - 3n \quad\rightarrow\quad a_1 = -2\ ,\ a_2 = -2\ ,\ a_3 = 0\ ,\ a_4 = 4\ ,\ a_5 = 10\ ,\ a_{10} = 70$

Ejercicio nº 2.-

Construimos dos progresiones, una aritmética y otra geométrica, tales que $a_1 = 1$ para ambas sucesiones y que la diferencia de una sea igual a la razón de la otra ($r = 3 = d$).
Comprueba qué número es mayor, el término vigésimo séptimo de la progresión geométrica o la suma de un millón de términos de la progresión aritmética.

Solución

Calculamos los términos generales de ambas progresiones:

$$\begin{cases} \textit{progresión aritmética}: \quad a_n = a_1 + (n-1)d \;\rightarrow\; a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 \;\rightarrow\; a_n = 3n-2 \\ \textit{progresión geométrica}: \quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \;\rightarrow\; a_n = 1\cdot 3^{n-1} \;\rightarrow\; a_n = 3^{n-1} \end{cases}$$

En la progresión geométrica $\rightarrow\ a_{27} = 3^{26} = 2.541.865.828.329$

En la progresión aritmética $\rightarrow\ S_{1000000} = \dfrac{(a_1 + a_{1000000})\cdot 1000000}{2} = (1+2999998)\cdot 500000 = 1.499.999.500.000$

$a_{27} > S_{1000000}$

Ejercicio nº 3.-

En una progresión aritmética conocemos los términos $a_6 = 10\ \ y\ \ a_{18} = 46$.

- Escribe los cinco primeros términos de la progresión.
- Halla el término que ocupa el lugar trigésimo sexto.
- Calcula el término general de la sucesión.
- Decide, razonadamente, si el número 2020 está en la progresión.

Solución

$$Es\ una\ progresión\ aritmética:\quad a_6=10\ \ y\ \ a_{18}=46 \quad\rightarrow\quad a_{18}=a_6+12d \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 46=10+12d \\ 36=12d \\ d=3 \end{cases}$$

$$a_6=a_1+5d \quad\rightarrow 10=a_1+15 \quad\rightarrow\quad a_1=-5$$

$$Los\ cinco\ primeros\ términos:\ -5\ ,-2\ ,1\ ,4\ ,7$$
$$a_{36}=a_1+35d \quad\rightarrow\quad a_{36}=-5+35\cdot 3=100$$
$$Término\ general:\ a_n=a_1+(n-1)d \quad\rightarrow\quad a_n=-5+(n-1)\cdot 3 \quad\rightarrow\quad a_n=3n-8$$
$$Veamos\ si\ 2020\ está\ en\ la\ progresión:\ 2020=3n-8 \ \rightarrow\ 2028=3n \quad\rightarrow\quad n=676 \ \rightarrow sí\ está,\ a_{676}=2020$$

Ejercicio nº 4.-

En la progresión $16\ ,12\ ,9\ ,\ldots\ldots$, añade tres términos y calcula la suma de sus infinitos términos.

Solución

$$16\ ,12\ ,9\ ,\ldots\ldots \quad\rightarrow\quad \frac{12}{16}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \quad\rightarrow es\ una\ progresión\ geométrica\ de\ razón\ r=\frac{3}{4}$$
$$La\ progresión\ es:\ 16\ ,12\ ,9\ ,\frac{27}{4}\ ,\frac{81}{16}\ ,\frac{243}{64}\ ,\ldots\ldots$$
$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r} \quad\rightarrow\quad S_\infty=\frac{16}{1-\frac{3}{4}}=64$$

Ejercicio nº 5.-

Halla la suma de los 250 primeros términos de la progresión $-9\ ,-4\ ,1\ ,6\ ,11\ ,\ldots\ldots\ldots$

Solución

$$La\ progresión\ es:\ -9\ ,-4\ ,1\ ,6\ ,11\ ,\ldots\ldots \quad\rightarrow\quad -4-(-9)=1-(-4)=6-1=11-6=5$$
$$Es\ una\ progresión\ aritmética\ de\ diferencia\ d=5$$
$$a_{250}=a_1+249d \quad\rightarrow\quad a_{250}=-9+249\cdot 5=1236 \quad\rightarrow\quad S_{250}=\frac{(a_1+a_{250})\cdot 250}{2}=(-9+1236)\cdot 125=153.375$$

Ejercicio nº 6.-

Eva ha firmado un contrato indefinido con su nueva empresa. Las condiciones económicas son 2.250 € mensuales y una subida anual del 5%. A Eva le gustaría saber:

- Cuánto cobrará al mes dentro de 15 años.
- Cuánto dinero habrá ganado durante esos 15 años.

Solución

$$Como\ cada\ año\ sube\ el\ sueldo\ un\ 5\%\ \rightarrow\ cada\ año\ se\ multiplica\ el\ sueldo\ del\ año\ anterior\ por\ 1,05$$
$$El\ sueldo\ anual\ sube\ un\ 5\%\ y\ en\ igual\ porcentaje\ sube\ el\ sueldo\ mensual.$$

$$Es\ una\ progresión\ geométrica\ de\ razón\ r=1,05:$$

$$Durante\ el\ primer\ año: \left[\begin{array}{l} sueldo\ mensual\ \ m_1 = 2.250 \\ sueldo\ anual\ a_1 = 2250\cdot 12 = 27.000 \end{array}\right.$$

$$Durante\ el\ segundo\ año: \left[\begin{array}{l} sueldo\ mensual\ \ m_2 = 2.250\cdot 1,05 = 2362,50 \\ sueldo\ anual\ a_2 = 2362,50\cdot 12 = 27.000\cdot 1,05 = 28.350 \end{array}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Durante\ el\ decimoquinto\ año: \left[\begin{array}{l} sueldo\ mensual\ \ m_{15} = 2.250\cdot (1,05)^{14} = 4.454,85 \\ sueldo\ anual\ a_{15} = 27.000\cdot (1,05)^{14} = 53.458,15 \end{array}\right.$$

$$Dentro\ de\ 15\ años,\ el\ sueldo\ mensual\ será\ de\ 4.454,85\ euros$$

$$Durante\ esos\ 15\ años\ ganará\ S_{15} = \frac{a_{16}-a_1}{r-1} = \frac{27000\cdot(1,05)^{15}-27000}{1,05-1} = 582.621,22\ euros$$

Ejercicio nº 7.-

Calcula la suma de todos los múltiplos de 6 comprendidos entre 100 y 10000.

Solución

$$Los\ múltiplos\ de\ 6\ son\ una\ progresión\ aritmética\ de\ diferencia\ d=6$$
$$6\ ,\ 12\ ,\ 18\ ,\ 24\ ,\ 30\ ,\ \ldots\ldots\ \ \rightarrow\ \ Término\ general:\ \ a_n = 6n$$

$$\left[\begin{array}{l} 100 < 6n \ \rightarrow\ \dfrac{100}{6} < n \ \rightarrow\ 16,\widehat{6} < n \ \rightarrow\ n=17 \ \rightarrow\ a_{17}\ es\ el\ primer\ término\ mayor\ que\ 100 \\ 6n < 10000 \ \rightarrow\ n < \dfrac{10000}{6} \ \rightarrow\ n < 1666,\widehat{6} \ \rightarrow\ n = 1666 \ \rightarrow\ a_{1666}\ es\ el\ múltiplo\ de\ 6\ anterior\ a\ 10000 \end{array}\right.$$

$$Hay\ que\ sumar\ a_{17}+a_{18}+a_{19}+\cdots\cdots\cdots+a_{1666}\ \ \rightarrow\ \ S = \frac{(a_{17}+a_{1666})\cdot 1650}{2} = \frac{(102+9996)\cdot 1650}{2} = 8.330.850$$

Ejercicio nº 8.-

En una progresión geométrica sabemos que **$a_1 = 2$** y **$a_4 = 54$**. Halla la razón, el término que ocupa el lugar vigésimo y la suma de los términos $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots\cdots\cdots + a_{20}$.

Solución

$$\text{Es una progresión geométrica: } \quad a_1 = 2 \ \ y \ \ a_4 = 54 \quad \rightarrow \quad a_4 = a_1 \cdot r^3 \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 54 = 2 \cdot r^3 \\ 27 = r^3 \\ r = \sqrt[3]{27} = 3 \end{array} \right.$$

$$a_{20} = a_1 \cdot r^{19} \quad \rightarrow \quad a_{20} = 2 \cdot 3^{19} = 2.324.522.934$$

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{r-1} \quad \rightarrow \quad a_{10} + a_{11} + \cdots\cdots + a_{20} = \frac{a_{21} - a_{10}}{r-1} = \frac{6.973.568.802 - 39.366}{3-1} = 3.486.764.718$$

Ejercicio nº 9.-

De una progresión aritmética conocemos $a_5 = 30$ y $a_{11} = 72$. Se pide:

- a_1 , a_{100} y la suma de los 100 primeros términos de la progresión.
- Decide si los números 347 y 429 pertenecen a la progresión.

Solución

$$\text{Es una progresión aritmética: } \quad a_5 = 30 \ \ y \ \ a_{11} = 72 \quad \rightarrow \quad a_{11} = a_5 + 6d \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 72 = 30 + 6d \\ 42 = 6d \\ d = 7 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \ \ \rightarrow \ \ 30 = a_1 + 28 \quad \rightarrow \quad a_1 = 2 \\ a_{100} = a_1 + 99d \ \ \rightarrow \ \ a_{100} = 2 + 99 \cdot 7 = 695 \end{array} \right] \quad \rightarrow \quad S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = (2 + 695) \cdot 50 = 34.750$$

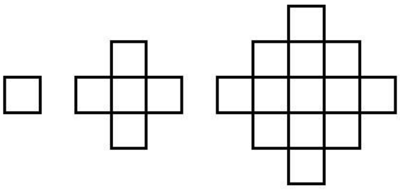
$$\text{Término general: } \ a_n = a_1 + (n-1)d \quad \rightarrow \quad a_n = 2 + (n-1) \cdot 7 \quad \rightarrow \quad a_n = 7n - 5$$

$$\text{Veamos si 347 está en la progresión: } 347 = 7n - 5 \ \rightarrow \ 352 = 7n \quad \rightarrow \quad n = 50,28... \ \rightarrow \text{no está}$$

$$\text{Veamos si 429 está en la progresión: } 429 = 7n - 5 \ \rightarrow \ 434 = 7n \quad \rightarrow \quad n = 62 \ \rightarrow \text{sí está, } a_{62} = 429$$

Ejercicio nº 10.-

En esta sucesión de tableros:



- ¿Cuántos cuadraditos tiene el que ocupa el décimo lugar?
- ¿Cuántos cuadraditos tiene el que ocupa el centésimo lugar?
- Encuentra una fórmula para calcular el número de cuadraditos del n-ésimo tablero de la sucesión (término general).

Solución

Los sucesión de los tableros es:

$$1 , 5 , 13 , 25 , 41 , \ldots\ldots \quad \to \quad 1 , 1+4 , 1+(4+8) , 1+(4+8+12) , 1+(4+8+12+16) , \ \ldots\ldots$$

Si consideramos la progresión aritmética de los múltiplos de 4: $\ 4 , 8 , 12 , 16 , \ldots\ldots$ *podemos construir la sucesión de la suma de términos de esa progresión:*

$s_1 = 4 \ , \ s_2 = 4+8 \ , \ s_3 = 4+8+12 \ , \ s_4 = 4+8+12+16 \ , \ \ldots\ldots\ldots$

$$\text{De esta forma, tenemos:} \left[\begin{array}{l} \text{el primer término de la sucesión de tableros es } a_1 = 1 \\ \text{el segundo término de la sucesión de tableros es } a_2 = 1+s_1 \\ \text{el tercer término de la sucesión de tableros es } a_3 = 1+s_2 \\ \text{el cuarto término de la sucesión de tableros es } a_4 = 1+s_3 \end{array} \right.$$

Así, el décimo término de la sucesión de tableros es $a_{10} = 1+s_9 = 1+180 = 181 \quad \left[s_9 = \dfrac{(4+36)\cdot 9}{2} = 180 \right]$

El centésimo término es $a_{100} = 1+s_{99} = 1+19800 = 19801 \quad \left[s_{99} = \dfrac{(4+396)\cdot 99}{2} = 19800 \right]$

El término general de la sucesión de tableros es $a_n = 1+s_{n-1} = 1+2n^2-2n \quad \to \quad a_n = 2n^2-2n+1$

$$s_{n-1} = \frac{\left[4+4(n-1)\right](n-1)}{2} = \frac{(4+4n-4)(n-1)}{2} = \frac{4n(n-1)}{2} = 2n(n-1) = 2n^2-2n$$