XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 24 de abril de 2010

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

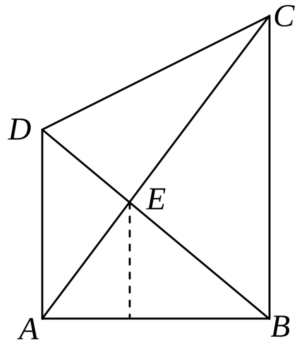
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura, de altura *AB* = 6 cm, las diagonales se cortan en el punto *E*, que dista 3 cm de *AB*. Si la diagonal *AC* mide 10 cm, la longitud, en cm, de la diagonal *BD* es:



A) $\frac{36}{5}$ **B)** $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ **C)** $\frac{6\sqrt{41}}{5}$ **D)** $\frac{12\sqrt{11}}{5}$ **E)** Nada de lo anterior

2 La ecuación, de incógnita *x*, $\ln(x+a) = \ln x + \ln a$ (*x* real, *a* > 1).

A) No tiene solución **B)** Tiene solución única **C)** Tiene dos soluciones
D) Se verifica para todo *x* positivo **E)** El número de soluciones depende del valor de *a*.

3 ¿Cuál de las siguientes igualdades puede ser falsa, siendo *x*, *a* y *b* números reales?

A) $x^2 + 2x + 1 = |x+1|^2$ **B)** $x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)$ **C)** $a^2 - 2ab + b^2 = (-a+b)^2$

D) $1 - \sqrt{x^2} = 1 - x$ **E)** Ninguna de ellas

4 Se considera $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$. Así pues $x = y + z$. En el siguiente razonamiento hay, evidentemente, un error. ¿En qué paso está el error?

A) Como $x = y + z \Rightarrow x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y)$
B) Si $x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y) \Rightarrow x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy$
C) Si $x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy \Rightarrow x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy$
D) Si $x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy \Rightarrow x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z)$
E) Si $x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z) \Rightarrow x = y$

5 La ecuación, de incógnita *x*, $\left|\left||x|-1\right|-b\right| = 4$ tiene exactamente 5 soluciones reales cuando *b* es:

A) Cualquier número positivo **B)** *b* =3 **C)** *b* = 4 **D)** *b* = 5 **E)** 4 < *b* < 5

6 Cuando una botella está llena de agua hasta $\frac{2}{3}$ de su volumen, pesa *a* kg. Cuando está llena hasta la mitad, pesa *b* kg. ¿Cuántos kg pesará cuando esté totalmente llena?

A) $\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}$ **B)** $\frac{3a}{2} - \frac{b}{2}$ **C)** $\frac{3a}{2} + b$ **D)** $\frac{3a}{2} + 2b$ **E)** 3*a*– 2*b*

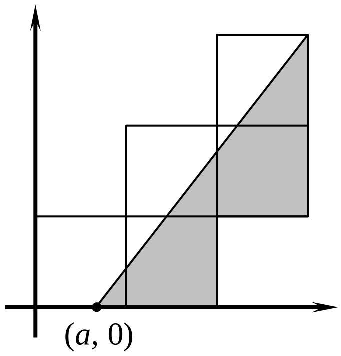
7 En una circunferencia de centro *O* marcamos dos puntos *A* y *C*. Si *B* es un punto exterior tal que *BA* y *BC* son tangentes a la circunferencia y el triángulo *ABC* es equilátero, ¿cuánto vale el cociente $\frac{BD}{BO}$, siendo *D* la intersección de *BO* con la circunferencia?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

8 Si la recta *y* = *mx* divide al triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y (6*m*, 0) en dos triángulos de igual área, la suma de todos los valores posibles de *m* es.

A) $-\frac{1}{3}$ **B)** $-\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

9 Dibujamos cinco cuadrados de lado 1 en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas como se muestra en la figura. Si el área de la región sombreada es $\frac{5}{2}$, el valor de a es:



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

10 ¿Cuál es el resto de la división de $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2010}$ entre 8?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

11 ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 12

12 Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x+3) = 3x^2 + 7x + 4$, $a + b + c$ es igual a:

A) – 1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

13 ¿Para qué valor de n se verifica que la suma $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + ni^n$ es el número complejo $48 + 49i$?

A) 24 **B)** 48 **C)** 49 **D)** 97 **E)** 98

14 Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro $O(3, 0)$ y radio 1. La suma de sus radios es:

A) 9 **B)** $\frac{17}{2}$ **C)** 8 **D)** $\frac{15}{2}$ **E) 7**

15 Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números complejos. Supongamos que $p(2010 + 102\,i) = p(2010) = p(102) = 0$. ¿Cuántas soluciones reales tiene como máximo la ecuación $0 = x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

16 Para cada entero positivo n, sea $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. ¿Cuál es la suma de todos los valores $f(n)$ que resultan ser números primos?

A) 794 **B)** 796 **C)** 798 **D)** 800 **E)** 802

17 ¿Cuál es el área del triángulo de vértices $A(4, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(-2010, 4020)$?

A) 4010 **B)** 4012 **C)** 4014 **D)** 4016 **E)** 4018

18 Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Sacamos las bolas sin mirar una a una. ¿Cuál es la probabilidad de que en algún momento sólo queden bolas blancas?

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{7}{10}$

19 Si $sen\ a + sen\ b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $cos\ a + cos\ b = 1$, $cos(a - b)$ es igual a:

A) $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 1

20 En el interior del triángulo equilátero *ABC* elegimos un punto *P*. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo *ABP* sea mayor que el área del triángulo *ACP* y que el área del triángulo *BCP*?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

21 ¿En qué intervalo está el número $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$?

A) (–2, –1) **B)** (1, 2) **C)** (–3, –2) **D)** (2, 3) **E)** (3, 4)

22 En el triángulo *ABC*, con *AB* = *AC*, resulta que tanto la longitud del lado *BC* como la de la altura que parte de *A* vienen dadas por números enteros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) *senÂ* es racional y *cosÂ* irracional **B)** *senÂ* y *cosÂ* son números racionales

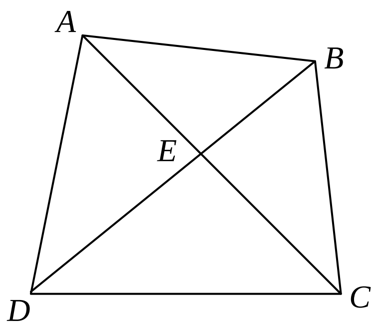
C) *senÂ* es irracional y *cosÂ* racional **D)** *senÂ* y *cosÂ* son irracionales

E) La irracionalidad de *senÂ* y *cosÂ* depende de los valores de *BC* y de la altura

23 Sea $M=\{(x,\ y)/\ y\geq x^2\}$ y $N=\{(x,\ y)/\ x^2+(y-a)^2\leq 1\}$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es condición necesaria y suficiente para que $M\cap N=N$?

A) $a\geq\frac{5}{4}$ **B)** $a=\frac{5}{4}$ **C)** $a\geq 1$ **D)** $0 < a < 1$ **E)** $1<a<\frac{5}{4}$

24 En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está hecho a escala, se verifica que *AB* = 9 y *CD* = 12. Las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *E*. Si *AC* = 14 y los triángulos *AED* y *BEC* tienen igual área, ¿cuál es la longitud de *AE*?



A) $\frac{9}{2}$ **B)** $\frac{50}{11}$ **C)** $\frac{21}{4}$ **D)** $\frac{17}{3}$

E) 6

25 El área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (*x*, *y*) tales que $|x-1|+|y-1|=1$ es:

A) 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** 3 **D)** π **E)** 4