



XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE:

NIVEL IV (Bachillerato)

iii Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	2 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

- 1** Cuando dividimos los números 272 758 y 273 437 por un determinado número N , de dos cifras, obtenemos como restos 13 y 17 respectivamente. La suma de los dígitos de N es:
A) 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12
- 2** ¿Cuál es el valor de la suma $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!}$?
A) $\frac{1}{2} - \frac{1}{100!}$ **B)** $1 - \frac{1}{100!}$ **C)** $1 - \frac{1}{99!}$ **D)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{99!}$ **E)** 1
- 3** Si $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}}$, x es igual a:
A) $\sqrt{2} - 2$ **B)** $\sqrt{2} + 2$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{2} + 1$ **E)** $\sqrt{2} - 1$
- 4** La suma y el producto de dos números coinciden. Si uno de ellos es x , ¿cuál es el valor de la suma?
A) $\frac{x^2+1}{x-1}$ **B)** $\frac{x^2+1}{x+1}$ **C)** $\frac{x^2}{x+1}$ **D)** $\frac{x^2}{x-1}$ **E)** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$
- 5** ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}} = 0$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4
- 6** Supón que sustituimos a , b y c por enteros positivos (no necesariamente distintos). De las siguientes expresiones, ¿cuál no puede representar al número 24?
A) ab^3 **B)** a^2b^3 **C)** $a^c b^c$ **D)** ab^2c^3 **E)** $a^b b^c c^a$
- 7** Si x , y , z son números reales arbitrarios, el menor valor posible de la expresión $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(y-x)^2+4} + \sqrt{(z-y)^2+1} + \sqrt{(10-z)^2+9}$ es:
A) 7 **B)** 13 **C)** $4 + \sqrt{109}$ **D)** $3 + \sqrt{2} + \sqrt{90}$ **E)** $\sqrt{149}$
- 8** Hoy es el cumpleaños de Alicia, Beatriz y Carlos. La suma de sus edades es 23 y el producto de sus edades supera en 113 al producto de sus edades hace justamente un año. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de sus edades?
A) 209 **B)** 185 **C)** 189 **D)** 241 **E)** 259
- 9** Si $f(11) = 11$ y $f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:
A) 11 **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $-\frac{6}{5}$ **D)** $-\frac{1}{11}$ **E)** 2011
- 10** La función $y = f(x)$ verifica que $f(f(x)) = 6x - 2011$ para cualquier número real x . Si el número t verifica la igualdad $f(t) = 6t - 2011$, el valor de t es:
A) $\frac{2011}{5}$ **B)** 0 **C)** 2011 **D)** $\frac{2011}{2}$ **E)** Nada de lo anterior
- 11** En cierta sucesión, la suma S_n de los n primeros términos viene dada por $S_n = n^3 + 3$. El décimo término de la sucesión es:
A) 1000 **B)** 1003 **C)** 271 **D)** 274 **E)** 997

12 Cada signo ♣ en la expresión $1 \clubsuit 2 \clubsuit 3 \clubsuit 4 \clubsuit 5 \clubsuit 6 \clubsuit 7 \clubsuit 8 \clubsuit 9 \clubsuit 10$ se sustituye por un signo “más” (+) o por un signo “por” (\times) obteniéndose una expresión aritmética cuyo mayor valor posible es N . ¿Cuál es el menor divisor primo de N ?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) Nada de lo anterior

13 Sea n el menor entero positivo que es divisible por 20, con n^2 cubo perfecto y además n^3 cuadrado perfecto. ¿Cuántas cifras tiene n ?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14 ¿Para qué valor de x se verifica que $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + \log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 40$?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 256 E) 1024

15 En el triángulo ABC se verifica que $\cos(2A - B) + \sin(A + B) = 2$. Si el lado AB mide 4, ¿cuánto mide el lado BC ?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

16 Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son a , 9, $3a - b$ y $3a + b$. ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 2011 en esta progresión?

- A) 8041 B) 8043 C) 8045 D) 8047 E) 8049

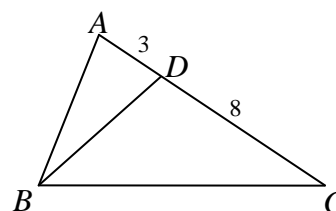
17 Escribimos la solución de la ecuación $7^{x+7} = 8^x$ como $x = \log_b 7^7$. ¿Cuál es el valor de b ?

- A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{15}{8}$ E) $\frac{15}{7}$

18 ¿Para cuántos valores enteros de k resulta que las gráficas de $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$ no se cortan?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4
E) 8

19 En el triángulo de la figura, BD es la bisectriz del ángulo B . Si $AD = 3$, $DC = 8$ y las longitudes de todos los lados del triángulo vienen dadas por números enteros, ¿cuál es el menor valor posible para el perímetro?



- A) 30 B) 33 C) 35 D) 36
E) 37

20 Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara al lanzarla es menor que $\frac{1}{2}$. Si la probabilidad de obtener igual número de caras que de cruces al lanzarla 4 veces

es $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara?

- A) $\frac{\sqrt{15} - 3}{6}$ B) $\frac{6 - \sqrt{6\sqrt{6} + 2}}{12}$ C) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ D) $\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

21 Sean a , b , c , d y e enteros positivos tales que $a + b + c + d + e = 2011$ y sea M la mayor de las sumas $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$. ¿Cuál es el menor valor posible para M ?

A) 503 B) 671 C) 802 D) 803 E) 804

22 En una progresión geométrica (a_n) se verifica que $a_1 = \operatorname{sen} x$, $a_2 = \operatorname{cos} x$ y $a_3 = \operatorname{tg} x$ para algún número x . ¿Para qué valor de n es $a_n = 1 + \operatorname{cos} x$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

23 ¿Cuántas ternas ordenadas (x, y, z) de enteros no negativos menores que 20 verifican que hay justamente dos elementos distintos en el conjunto $\{i^x, (1+i)^y, z\}$, siendo $i^2 = -1$

A) 149 B) 205 C) 215 D) 225 E) 235

24 En el interior de un cuadrado de lado 1 se escoge al azar un punto P . Sea $d(P)$ la distancia de P al lado del cuadrado que se encuentre más cerca. La probabilidad de que $\frac{1}{5} \leq d(P) \leq \frac{1}{3}$ es:

A) $\frac{56}{225}$ B) $\frac{53}{225}$ C) $\frac{49}{225}$ D) $\frac{47}{225}$ E) Nada de lo anterior

25 Escribimos en la pizarra los números $1, 2, 3, \dots, 100$. ¿Cuántos hay que borrar, como poco, para que el producto de los que queden termine en 2?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24